

УДК 510.8

**Корінчук Наталія Юріївна,**

викладач-методист математики

Луцького педагогічного коледжу

E-mail – matfiz@lpk.uk.net

**Корінчук Володимир Васильович,**

викладач-методист математики

Луцького вищого професійного

училища будівництва та архітектури.

E-mail – volodimirkorinchuk@gmail.com

### **МОДЕЛЮВАННЯ В МАТЕМАТИЦІ ПІД ЧАС РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРИКЛАДНИХ ТА ПРАКТИЧНИХ ЗАДАЧ.**

**Корінчук Н.Ю., Корінчук В.В.** Моделювання в математиці під час розв'язування прикладних та практичних задач. У статті розглядається проблема формування у студентів умінь математичного моделювання при вивченні природничо-математичних та фундаментальних дисциплін, обґрунтовується необхідність оволодіння студентами вміннями математичного моделювання як універсального методу розв'язування прикладних та практичних задач.

**Ключові слова:** математична модель, математичне моделювання, об'єкт дослідження, аналіз, універсальний метод, властивості моделей.

**Корінчук Н.Ю., Корінчук В.В.** В статье рассматривается проблема формирования у студентов умений математического моделирования при изучении естественно-математических и фундаментальных дисциплин, обосновывается необходимость овладения студентами умениями математического моделирования как универсального метода решения прикладных и практических задач.

**Ключевые слова:** математическая модель, математическое моделирование, объект исследования, анализ, универсальный метод, свойства моделей.

**Korinchuk N.U., Korinchuk V.V.** The article deals with the problem of forming mathematical modeling skills for students in the study of natural and mathematical and fundamental disciplines, the necessity of mastering the skills of mathematical modeling as a universal method of solving applied and practical problems is substantiated.

**Key words:** mathematical model, mathematical modeling, object of research, analysis, universal method, properties of models.

**Постановка проблеми.** Моделювання є важливим

засобом розв'язання багатьох прикладних та практичних задач з математики.

Особливого значення набуває математичне моделювання при викладанні природничо-математичних та фундаментальних дисциплін.

Зазначені вище навчальні дисципліни покликані сформувати у студентів систему знань з методології та інструментарію побудови й

використання різних типів математичних моделей. Тому виникає необхідність у розкритті сутності математичного моделювання під час викладання цих дисциплін у закладах вищої освіти I-II рівня акредитації та у закладах професійно-технічної освіти.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Основні методичні положення навчання студентів математичного моделювання розкрито в роботах Б. В. Гнеденка [3], В. М. Монахова [5], С. І. Шварцбурда [11], **Л. Р. Калапуши** [4], Л. О. Соколенко [9].

В Україні найбільш глибокі і змістовні наукові дослідження в цьому напрямі проведено Г. М. Возняком, **Л. Р. Калапушею**, Л. О. Соколенко та ін. У педагогічній науці досліджувалися теоретичні та методичні основи математичної освіти в загальноосвітніх і професійних навчальних закладах (В. Бобров, О. Падалка, І. Прокопенко); принципи відбору змісту математичних дисциплін (Б. Гнеденко, Л. Кудрявцев, Д. Пойа, А. Постников, А. Тихонов); науково-методичні основи математичної освіти студентів вищих навчальних закладів (Л. Нічуговська); застосування математичного моделювання та основні методичні положення навчання із застосуванням математики в освітньому процесі (В. Варфоломеев, Ю. Кулюткін, В. Ситник, Г. Фомін, С. Яковлев, С. Великодній, Г. Возняк, М. Ігнатенко). Однак проблема математичного моделювання при розв'язуванні прикладних та практичних задач ще не повністю досліджена.

**Метою статті** є визначення особливостей математичного моделювання під час викладання природничо-математичних дисциплін у закладах вищої освіти I-II рівня акредитації та у закладах професійно-технічної освіти. Під час вивчення цих дисциплін перед студентами постає необхідність побудови математичних моделей на основі застосування їх до розв'язування прикладних та практичних задач. Метою такого навчання є одержання ними досвіду встановлення зв'язків між конкретними поняттями, явищами й абстрактними математичними формулами,

використання структури формалізованої математичної мови для вивчення кількісної сторони розглянутих явищ, розвиток логічного мислення при проведенні аналізу отриманих моделей. Під час вивчення природничо-математичних та фундаментальних дисциплін студенти повинні здобути навичок аналізу ситуації або процесу, уміти розв'язувати питання про керовані й некеровані фактори досліджуваного явища, навчитися визначати істотні та несуттєві зв'язки, визначати мету дослідження та знаходити шляхи її розв'язання. У весь процес вивчення цих дисциплін, починаючи з першого курсу, повинен бути пов'язаний з побудовою математичних моделей, математичними методами їх вирішення, аналізом отриманих результатів. Моделювання застосовують для дослідження об'єктів, процесів, явищ у різноманітних галузях. Воно слугує для визначення і поліпшення характеристик реальних об'єктів і процесів; для розуміння сутності явищ та управління ними; для конструювання нових об'єктів або модернізації існуючих. Тому детальніше розглянемо поняття математичної моделі та процесу математичного моделювання.

Термін “модель” від латинського слова “modelium” означає: міра, образ, спосіб тощо. Модель – це уявний об'єкт, побудований з метою відтворення за певних умов суттєвих властивостей об'єкта-оригіналу. Модель може бути представлена фізичним об'єктом, подібним до оригіналу, або описом об'єкта у вигляді математичних формул, тексту, комп'ютерної програми. Моделлю може стати штучно створений абстрактний або матеріальний об'єкт. Аналіз моделі дозволяє пізнати сутність реально існуючого об'єкта, процесу або явища (прототип-оригінал). Отже, модель – це спрощене уявлення про реальний процес або явище [5]. Модель має цільовий характер, тобто вона відображає не сам об'єкт – оригінал, а формується, виходячи з

цілком конкретних властивостей об'єкта моделювання відповідно мети відображення.

На думку В. Штоффа, модель – це уявна або матеріально реалізована система, яка, відображаючи або відтворюючи об'єкт дослідження, змінює його з метою отримання про нього нової інформації [8]. К. Батароєв визначає, що “модель – це створена або вибрана суб'єктом система, яка відтворює істотні характеристики (елементи, властивості, відносини, параметри) об'єкта вивчення і через це перебуває з ним у такому відношенні заміщення і схожості (зокрема, ізоморфізму), за якого її дослідження слугує опосередкованим способом отримання про неї нових знань” [1, с. 28]. Будь-яка модель завжди спрощена, функціонально неадекватна об'єкту чи явищу, що моделюється, і відображає лише їх загальний образ або вірогідний сценарій (яких може бути декілька) процесу тощо. Модель не копіює, а лише імітує реальність.

Метод моделювання дозволяє досліджувати багато процесів, які є послідовними для безпосереднього спостереження чи експериментального відтворення. [7, с. 233–234]. Основними властивостями моделей є такі [7]:

1). Цілеспрямованість. Модель завжди будується з певною метою про те, які властивості об'єктивного явища вважати істотними, а які – ні. Модель є своєрідною проекцією об'єктивної реальності під певним кутом зору. Інколи залежно від мети можна отримати ряд проєкцій об'єктивної реальності, що вступають у протиріччя. Це характерно, як правило, для складних систем, в яких кожна проєкція виділяє суттєве для певної мети з безлічі несуттєвого. Задача моделювання полягає в тому, що для заданого об'єкта потрібно підбрати якийсь опис, який повною мірою б відображав оригінал відповідно до мети моделювання.

2). Скінченність. Модель відтворює лише скінчену кількість властивостей та відношень, і через це завжди є більш простою, ніж оригінал.

3). Повнота. Модель має відображати всі істотні з точки зору мети моделювання властивості оригіналу.

4). Адекватність, тобто відтворення моделі з необхідною повнотою всіх властивостей реального об'єкта, важливих для цілей даного дослідження. Це одна з найголовніших властивостей моделі, яка визначає можливість її використання. Оскільки будь-яка модель простіша за оригінал, ніколи не можна говорити про її абсолютну адекватність, за якої вона за всіма характеристиками відповідає оригіналу. Модель називається ізоморфною (однаковою за формою), якщо між нею і реальною системою існує повна елементна відповідність, і гомеоморфною, якщо існує відповідність лише між найбільш значними складовими частинами об'єкта і моделі. Чинники, що зумовлюють застосування моделей: природна складність багатьох організаційних ситуацій; неможливість реального здійснення експерименту; наявність багатьох факторних залежностей у процесі розв'язання прикладних задач; необхідність експериментальної перевірки альтернативних управлінських рішень. Математична модель – абстракція реальної дійсності (світу), в якій відношення між реальними елементами, а саме ті, що цікавлять дослідника, замінені відношеннями між математичними категоріями.

Ці відношення зазвичай подаються у формі рівнянь чинерівностей, відношеннями формальної логіки між показниками (змінними), які характеризують функціонування реальної системи, що моделюється [7].

Моделювання включає створення, дослідження та використання моделей об'єктів. Під моделюванням розуміють дослідження будь-яких явищ, процесів чи систем шляхом побудови й вивчення їхніх моделей, тобто уявних об'єктів або матеріально реалізованих систем, кожна з яких, відображаючи чи відтворюючи об'єкт-оригінал, здатна заміщувати його з метою змістовного вивчення та отримання нової інформації. Моделювання є важливим інструментом наукової абстракції, що допомагає виокремити,

уособити та проаналізувати суттєві для даного об'єкта характеристики (властивості, взаємозв'язки, структурні та функціональні параметри). Метою моделювання є здобуття, обробка, представлення і використання інформації про об'єкти, які взаємодіють між собою і зовнішнім середовищем. Моделювання допомагає людині приймати обґрунтовані й оптимальні рішення, передбачати наслідки своєї діяльності. У результаті моделювання створюється проміжний об'єкт знання – модель, що у пізнавальному процесі виконує низку функцій, зокрема: заміщення, інформаційну, гносеологічну, формалізаційно-алгоритмічну, доказово-ілюстративну. Інформаційна функція моделі полягає в тому, що вона не лише відображає похідну інформацію про об'єкт пізнання, але й дозволяє дістати нову інформацію про нього, оскільки основою будь-якого виду чи способу моделювання є прийоми перетворення інформації. Використовуючи відповідний математичний апарат, якісні характеристики об'єкта пізнання можна доповнити його кількісними характеристиками, що сприяє поглибленню процесу пізнання від явища до його сутності більш високого порядку. Таким чином, реалізується найважливіша риса суто наукового пізнання – єдність якісного й кількісного аналізу інформації, що характеризує об'єкт дослідження. Гносеологічна функція моделі полягає в тому, що вона виступає як єдність протилежних сторін пізнання – абстрактного та конкретного, логічного і чуттєвого, ненаглядного й наочного. Таким чином, при дослідженні будь-якого об'єкта, як і для будь-якого пізнавального процесу, моделювання (а модель, як його результат) визначає важливу гносеологічну функцію. Крім того, гносеологічне значення моделювання у пізнанні проявляється також у тому, що модель є вузловим пунктом процесу руху думки від менш до більш повного знання, від менш глибокого до більш глибокого пізнання сутності явищ. В одному випадку модель виступає як вторинний об'єкт дослідження, в іншому – як засіб його фіксації. Функції формалізації об'єкта та алгоритму його

дослідження проявляються при використанні математичного апарату та засобів обчислювальної техніки для аналізу складних об'єктів. Глибина відбиття моделлю дійсності залежить також від цілей її побудови.

Виділяють два види моделювання – фізичне та математичне (абстрактне). Зупинимося на одному з найбільш універсальних видів моделювання – математичному, що ставить у відповідність модельованому процесу систему математичних співвідношень, розв'язання яких дозволяє отримати відповідь на питання про поведінку об'єкта. Моделювання є важливим інструментом наукової абстракції, що допомагає виокремити, уособити та проаналізувати суттєві для даного об'єкта характеристики (властивості, взаємозв'язки, структурні та функціональні параметри). Математичне моделювання – моделювання, за якого модель є системою математичних співвідношень, що описують певні технологічні, економічні чи інші процеси. Завдяки застосуванню математичного апарату воно є найефективнішим і найдосконалішим методом. У свою чергу, математичні методи не можуть застосовуватися безпосередньо, а лише до математичних моделей того чи іншого кола явищ [5, с.49–54].

Існує певний алгоритм розробки моделей, а саме:

- 1). Постановка задачі. Перший і найважливіший етап побудови моделі, здатний забезпечити правильне рішення управлінської проблеми, полягає в постановці задачі. Правильне використання математики або комп'ютера не принесе користі, якщо саму проблему не буде точно діагностовано.
- 2). Побудова моделі. Розробник повинен визначити головну мету моделі, які вихідні нормативи або інформацію передбачається одержати, використовуючи модель.
- 3). Перевірка моделі на достовірність. Один з аспектів перевірки полягає у визначенні ступеня відповідності моделі реальному об'єкту. Другий аспект перевірки моделі пов'язаний із встановленням ступеня, в

якою інформація, одержувана з її допомогою, дійсно допомагає впоратися з проблемою.

4). Використання моделі. Застосування результатів моделювання на розв'язання прикладних та практичних завдань.

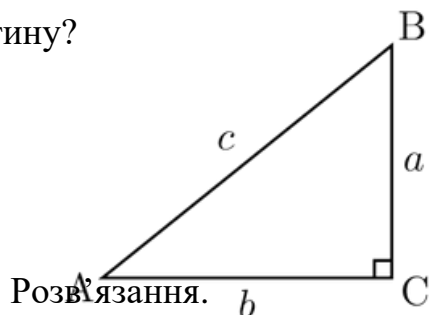
5). Оновлення моделі. Навіть якщо використання моделі виявилось успішним, розробник може виявити чинники для удосконалення моделі.

### Виклад основного матеріалу.

Розглянемо конкретні приклади застосування математичної моделі при розв'язуванні прикладних та практичних задач.

Задача №1. Із фанери випиляли квадрат. Як перевірити, що випиляний чотирикутник є дійсно квадратом? Пригадаємо із студентами властивості квадрата і їхні версії будуть різними: вимірювати сторони, діагоналі і т.д., але ніяких вимірювальних приладів немає. Врешті-решт приходимо до висновку і правильної версії, що вирізаний чотирикутник потрібно повернути на  $90^\circ$  і вставити в отвір. І якщо він пройде скрізь отвір, то випиляний чотирикутник є дійсно квадратом.

Задача №2. Арматурний прут довжиною 2,1 м треба зігнути під прямим кутом так, щоб відстань між його кінцями дорівнювала 1,5 м. Де має бути точка згину?



Дано:  $\triangle ABC$ ;  $AC + CB = 2,1$  м;

$AB = 1,5$  м;  $\angle ACB = 90^\circ$

Знайти:  $AC = ?$   $CB = ?$

Моделлю арматурного прута, якого зігнули під прямим кутом буде прямокутний трикутник. Отже, за умовою маємо:  $a + b = 2,1$ ; із  $\triangle ABC$  ( $\angle ACB = 90^\circ$ ) за теоремою Піфагора:  $a^2 + b^2 = c^2$ .



Складаємо систему рівнянь:  $\begin{cases} a + b = 2,1; \\ a^2 + b^2 = c^2 \end{cases}$  із першого рівняння визначимо  $b$  і підставимо в друге дістанемо:  $b = 2,1 - a$ ;  $a^2 + (2,1 - a)^2 = 1,5^2$ ; піднісши до квадрату та розв'язавши квадратне рівняння, дістанемо два розв'язки:

$$\begin{cases} a_1 = 0,9\text{м}; & a_2 = 1,2\text{м}; \\ b_1 = 1,2\text{м}; & b_2 = 0,9\text{м}; \end{cases}$$

Далі із студентами робимо інтерпретацію розв'язків і приходимо до висновку, що прут можна зігнути у двох місцях від точки А на відстані 0,9 м або 1,2 м.

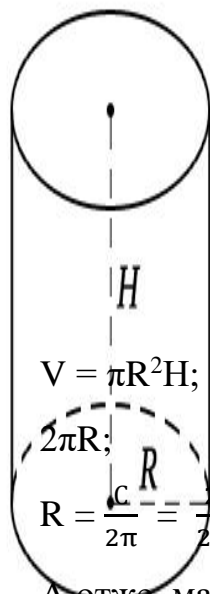
**Задача №3.** Соснова колода довжиною 4 м має в обхваті 2,55 м. Обчислити її об'єм і масу. Густина деревини сосни дорівнює  $0,51 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ .

Дано: циліндр;  $H = 4\text{м}$ ;  $C = 2,55\text{м}$ ;  $\rho = 0,51 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ .

Знайти:  $V = ?$ ;  $m = ?$

Розв'язання.

Моделлю сосної колоди буде геометрична фігура – циліндр. А отже, запишемо відомі формули з геометрії та фізики для знаходження об'єму циліндра та його маси.



$$V = \pi R^2 H; \quad m = \rho V. \text{ Знайдемо радіус циліндра: } C =$$

$$R = \frac{C}{2\pi} = \frac{2,55\text{м}}{2 \cdot 3,14} = 0,4\text{м}; \text{ тоді: } V = 3,14 \cdot (0,4)^2 \cdot 4 = 2\text{м}^3.$$

А отже, маса колоди буде дорівнювати:  $m = 2\text{м}^3 \cdot 0,51 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 = 1,02 \cdot 10^3 \text{ кг} = 1,02\text{т}$ . Робимо висновок, що об'єм колоди складає  $2\text{м}^3$ , а її маса –  $1,02\text{т}$ .  
Відповідь:  $V = 2\text{м}^3$ ;  $m = 1,02\text{т}$ .

**Висновки.** Під час викладання природничо-математичних та фундаментальних дисциплін у закладах вищої освіти I-II рівня акредитації ще на початковому етапі викладач повинен надати студентам основні відомості про математичні методи та моделі дослідження об'єктів та явищ. Перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження полягають у розробці моделі підготовки випускника до професійної діяльності, формуванню у них вміння застосовувати отримані знання у практичній,

наближеній до життєвої ситуації, будувати та досліджувати математичні моделі задач, професійній орієнтації та компетенції студентів.

**Перспективиподальшихпошуків у напрямкудослідження.** Формування вмінь математичного моделювання через цикли прикладних та практичних задач можевідбуватись у процесінавчання не тільки математики, а й кожного з природничо-математичних предметів. Цесприяєміжпредметномуузагальненнюнабутихучнями знань і вмінь, формуванню в них уявлень про універсальний характер математичнихметодівдослідження, зокрема методу математичного моделювання, можливостіїхньогоефективногозастосовуються для вивчення різних за своєю природою об'єктів, явищ і процесів.

#### **СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.**

1. Батароев К. Б. Аналогии и модели в познании / К. Б. Батароев. – Новосибирск : Наука, 1981. – 320 с.
2. Бевз Г. П. Алгебра: підручн. для 9 кл. загальноосвітн. навч. закл. / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. — К. : Зодіак-ЕКО, 2009. — 288 с.
3. Гнеденко Б. В. Математика и математическое образование в современном мире / Б. В. Гнеденко. — М. : Просвещение, 1985. — 192 с.
4. Калапуша Л. Р. Моделювання у вивченні фізики / Л. Р. Калапуша. — К. : Радянська школа, 1982. — 158 с.
5. Монахов В. М. Технологические основы проектирования и конструирования учебного процесса / В. М. Монахов. - Волгоград, 1995. 168 с.
6. Остапчук М. В. Математичне моделювання на ЕОМ : [підруч.] / Остапчук М. В., Станкевич Г. М. – Одеса : Друк, 2006. – 313 с.
7. Самарский А. А. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры / А. А. Самарский, А. П. Михайлов. — М. : ФИЗ.-МАТ. ЛИТ., 2001.
8. Скворцова М. Математическое моделирование / М. Скворцова // Математика. — 2003. — № 14. — С. 2–4.

9.Соколенко Л. О. Методика

реалізації прикладної спрямованості шкільної алгебри і початків аналізу: Дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Соколенко Лілія Олександрівна; Укр. держ. пед. ун-т ім. М.П. Драгоманова. - К, 1997. – 245с.

10. Станжицький О. М. Основи математичного моделювання : навч. посіб. / О. М. Станжицький, Є. Ю. Таран, Л. Д. Гординський. – К. : Видавничо-поліграфічний центр “Київський університет”, 2006. – 96 с.

11. Шварцбурд С. И. Электроника помогает считать / С. И. Шварцбурд, М. П. Ковалев. — М. : Просвещение, 1978. — 96 с.

12.Штофф В. А. Моделирование и философия / В. А. Штофф. – М.– Л. : Наука, 1996. – 30 с.