УПРАВЛІННЯ ОСВІТИ І НАУКИ
ВОЛИНСЬКОЇ ОБЛАСНОЇ ДЕРЖАВНОЇ АДМІНІСТРАЦІЇ
КОМУНАЛЬНИЙ ЗАКЛАД ВИЩОЇ ОСВІТИ
«ЛУЦЬКИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ КОЛЕДЖ»
ВОЛИНСЬКОЇ ОБЛАСНОЇ РАДИ

Наталія Нарихнюк
Тетяна Четверикова

ПРАКТИКУМ З МАТЕМАТИКИ

І ЧАСТИНА

Посібник для абітурієнтів та здобувачів повної загальної середньої освіти

Л у ц ь к – 2024

УДК 51(076.5) (075.8)
Н 28

Рекомендовано до друку методичною радою
Луцького педагогічного фахового коледжу
Комунального закладу вищої освіти «Луцький педагогічний коледж»
Волинської обласної ради
(протокол № 8 від 25. 03. 2024)

Рецензенти:
Мартинюк О. С. – доктор педагогічних наук, професор, професор кафедри експериментальної фізики, інформаційних та освітніх технологій Волинського національного університету імені Лесі Українки
Корнелюк В. О. – викладач-методист, голова циклової комісії природничо-математичних дисциплін Комунального закладу вищої освіти «Луцький педагогічний коледж» Волинської обласної ради.

Нарихнюк Н.Ю., Четверикова Т. Г.
Практикум з математики (1 частина): посібник / упоряд. Н. Ю. Нарихнюк, Т. Г. Четверикова. Луцьк: Комунальний заклад вищої освіти «Луцький педагогічний коледж» Волинської обласної ради, 2024. 130 с.

Посібник містить 1121 нескладних, але корисних вправ з усього курсу алгебри та початків аналізу і геометрії 11-річної школи. Переважну більшість завдань, запропонованих у посібнику, можна виконувати без додаткових записів на дошці чи рисунків, лише для незначної кількості вправ додаткові записи є необхідними.

Абсолютна більшість пропонованих вправ потребує миттєвої відповіді або розв’язується за допомогою 1-3 логічних кроків. Саме такі вправи складають першу частину завдань зовнішнього незалежного оцінювання (ЗНО/НМТ). Тому посібник також принесе користь тим, хто готується до ЗНО та ДПА.

Посібник буде корисний здобувачам освіти для закріплення теоретичного матеріалу, при підготовці до зовнішнього незалежного тестування, а також викладачам математики як дидактичний матеріал.

ПЕРЕДМОВА

Посібник містить 1121 нескладних, але корисних вправ з усього курсу алгебри та початків аналізу і геометрії 11-річної школи.

Переважну більшість запропонованих у посібнику вправ можна виконувати без додаткових рисунків чи записів на дошці. Складніші вправи позначено зірочкою.

Абсолютна більшість пропонованих завдань потребує миттєвої відповіді або розв'язується за допомогою 1-3 логічних кроків. Саме такі вправи складають першу частину завдань зовнішнього незалежного оцінювання, а тому посібник стане корисним і для тих, хто готується до ЗНО/НМТ та ДПА.

Основна мета посібника – допомогти викладачеві математики у доборі нескладних корисних вправ (переважно початкового та середнього рівнів навчальних досягнень) зі шкільного курсу алгебри та початків аналізу і геометрії 10-го класу. Саме таких видів вправ бракує у діючих підручниках. Викладач може пропонувати їх на різних етапах навчання: під час повторення, актуалізації опорних знань, вивчення нового матеріалу та його закріплення.

Під час виконання запропонованих вправ здобувачі освіти закріплюють теоретичні знання, тренують пам'ять, підвищують свою логічну та загальноматематичну культуру. Нескладні вправи розвивають у студентів уважність, спостережливість, ініціативність, пробуджують інтерес до математики. Так, розв'язавши нескладну вправу, слабкий здобувач освіти зможе повірити у свої сили, а студенти середнього та вищого рівня навчання закладуть фундамент для розв'язування складніших вправ.

У рубриці «Життєва математика» зібрано задачі, які відображають реальні життєві ситуації, пов'язані з економічною грамотністю і підприємливістю, екологічною безпекою, здоровим способом життя, громадянською відповідальністю, тобто усім тим, без чого неможливо уявити людину в сучасному світі.

У посібнику відсутні відповіді до вправ, а тому його доцільно використовувати і як дидактичний матеріал.

Посібник відповідає вимогам навчальної програми, а тому легко адаптується до будь-якого підручника.

Автори заздалегідь вдячні читачам посібника за будь-які побажання та зауваження, які можна надсилати за адресою: 43010 м.Луцьк, проспект Волі, 36, Комунальний заклад вищої освіти «Луцький педагогічний коледж» Волинської обласної ради. **E-mail:** lpk@ua.fm.

Частина І
АЛГЕБРА ТА ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

Розділ 1. ПОВТОРЕННЯ ЗА ШКІЛЬНИЙ КУРС

1. Обчислити:

1) $23{,}5 \cdot 10$; 2) $47{,}96 \cdot 100$; 3) $12{,}077 \cdot 1000$;
4) $0{,}08 \cdot 10$; 5) $10\,005 : 100$; 6) $0{,}0036 \cdot 1000$;
7) $345 \cdot 0{,}1$; 8) $29{,}5 \cdot 0{,}01$; 9) $345{,}8 \cdot 0{,}001$;
10) $2{,}3 \cdot 0{,}1$; 11) $3{,}7 \cdot 0{,}01$; 12) $67{,}981 : 0{,}001$.

2. Знайдіть значення виразу зручним способом:

1) $3{,}72 \cdot 2{,}41 - 2{,}72 \cdot 2{,}41$; 2) $2{,}252 - 0{,}252$;
3) $5{,}27 \cdot 1{,}45 + 4{,}73 \cdot 1{,}45$; 4) $0{,}04 - 10{,}22$;
5) $132+(214-32)$; 6) $2{,}38-(1{,}38+0{,}87)$;
7) $3{,}5\cdot1{,}2+3{,}5\cdot3{,}8+3{,}5\cdot4{,}3+3{,}5\cdot0{,}7$; 8) $11{,}2^2 - 1{,}44$;
9) $105^2 - 25$; 10) $36\cdot\left(\frac{17}{18}-\frac{11}{12}+\frac{8}{9}-\frac{5}{6}\right)$.

3. Знайдіть середнє арифметичне і середнє геометричне чисел 2 і 18.

4. Знайдіть суму, різницю, добуток і частку чисел 4,2 і $2\frac{1}{3}$.

5. Одне з двох натуральних чисел на 5 більше за інше. Знайдіть ці числа, якщо їх добуток дорівнює 266.

6. Знайдіть число, дві третини якого дорівнюють чотирьом дев'ятим від 225.

7. Чотири п'ятнадцятих одного числа дорівнюють 36, дві дев'ятих частини іншого числа дорівнюють 30. Яке число більше і наскільки?

8. Мотоцикл рухається зі швидкістю 60 км/год. Який шлях проїде мотоцикл за:
1) 5 год; 2) 1,5 год; 3) 15 хв; 4) 2 год 45 хв.

9. Знайдіть 12 % від числа: 1) 45; 2) 2,5.

10. Знайдіть число, 15 % якого дорівнює: 1) 300; 2) 0,6.

11. Скільки відсотків години становить: 1) 48 хвилин; 2) 18 хвилин?

12. Ціна плаття становить 600 грн. Скільки буде коштувати плаття після зниження ціни на 15%?

13. За перший день турист подолав 18 км, що становить 25% маршруту. Яка довжина всього маршруту?

14. За першу хвилину принтер надрукував 8 сторінок, що становить 20% текстового файлу. Скільки сторінок залишилося надрукувати принтеру?

15. Спростити вирази:

1) $\frac{2a}{4в}$; 2) $\frac{7a^2}{21ав^3}$; 3) $\frac{25ax^2}{75a^8x}$;
4) $\frac{ax^2-x^3}{ax-x^2}$; 5) $\frac{5^3cm}{5^0c^2m}$; 6) $\frac{4x(x-y)}{7y(x-y)^2}$;
7) $\frac{2x-x^4}{2y-x^3y}$; 8) $\frac{1}{a+в}+\frac{3}{x(a+в)}$; 9) $\frac{x^2-m^2}{x(x+m)}-\frac{x}{m}$.

16. Перемножити дроби:

1) $\frac{3}{2в}\cdot\frac{6в}{c}$; 2) $\frac{8a^2}{15}\cdot\frac{25}{12a}$; 3) $\frac{a-в}{3}\cdot\frac{15}{a^2-в^2}$.

17. Знайти значення виразу:

1) $\frac{4}{7}\div\frac{2}{21}$; 2) $-15\div\frac{5}{7}$; 3) $\frac{3,5}{4}\div\left(-\frac{7}{16}\right)$;

4) $\frac{9}{10}+0,1-\frac{4}{5}$; 5) $3\frac{1}{2}+4\frac{1}{2}-5\frac{1}{4}$; 6) $0,2+\frac{4}{5}-\frac{1}{10}$;

7) $\frac{18c^2}{5xy}\div\frac{9c^3}{15x^2}$; 8) $\frac{3}{5}+\frac{3}{7}\div\frac{1}{7}-3\frac{3}{5}$; 9) $\left(1,1+2\frac{4}{5}\right)\cdot 10\div\frac{39}{80}$;

10) $\frac{3}{19}\div 1\cdot 0,19$; 11) $1\div\frac{4}{5}\cdot\frac{8}{15}$; 12) $\frac{7}{81}\cdot 0+\frac{1}{10}\div 10$.

18. Обчислити значення дробів:

1) $\left(2\frac{13}{50}-2\frac{1}{20}\right)\cdot 3\frac{4}{7}$; 2) $\left(2\frac{3}{5}+0.7\right)\frac{15}{22}$;

3) $\left(11\frac{1}{3}-0.5\right)\frac{1}{13}$; 4) $\left(1\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{7}+25,7\right)\cdot\frac{10}{89}$.

19. Спростити вираз: 1) $\left(1-\sqrt{8}\right)^2+4\sqrt{2}.$; 2) $\left(\sqrt{3}+2\right)^2-\sqrt{48}.$

20. Якому з наведених виразів тотожно дорівнює вираз: x^4+x^3-x-1?.

1) $(x+1)^2\left(x^2+x+1\right)$; 2) $\left(x^2-x+1\right)(x-1)^2$;

3) $(x-1)^3(x+1)$; 4) $\left(x^2-1\right)\left(x^2+x+1\right)$.

21. Обчислити:

1) $\frac{49^7\left(7^{-2}\right)^3}{7^7}$; 2) $\frac{25^5\cdot\left(5^{-3}\right)^2}{5^5}$; 3) $\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)^2$;

4) $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{44}\right)^2$; 5) $\sqrt{\frac{5}{7}}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{\frac{1}{5}}$; 6) $\sqrt{1\frac{24}{25}+\frac{\sqrt{99}}{\sqrt{11}}}$.

Числові послідовності

22. Послідовність має *n* членів. Який номер має третій від кінця член? Який номер у члена, що передує йому?

23. Назвати три перших члени послідовності:

1) $a_n=n^2$; 2) $a_n=(n-1)^3$; 3) $a_n=(-1)^n\cdot n$;

4) $a_n=3-2(n-1)$; 5) $a_n=\frac{n^2}{n+2}$; 6) $a_n=2^n$.

24. Який номер має член послідовності $a_n=n^2-1$, якщо він дорівнює 8?

25. Чи можуть числа: 1) 120; 2)216; 3)-8 бути членами послідовності $a_n=(n-1)^3$?

26. Назвати п’ять перших членів послідовності:

1) двозначних чисел, взятих у порядку зростання;

2) квадратів натуральних чисел, збільшених на 5;

3) двозначних чисел, кратних числу 5, взятих у порядку зростання;
4) натуральних чисел, які при діленні на 5 дають остачу 2;
5) правильних звичайних дробів зі знаменником 19, взятих у порядку спадання;
6) перший та другий члени якої дорівнюють одиниці, а кожний наступний дорівнює сумі двох попередніх.

27 * **.** Знайти кількість додатних членів послідовності $a_n = 21 - 4n.$

28 * **.** Знайти найбільший член послідовності $a_n = 30 - n.$

29 * **.** Знайти найменший член послідовності $a_n = 2n^2 - 1.$

Арифметична прогресія, її властивості. Сума перших *n* членів арифметичної прогресії

30. Які з наведених нижче послідовностей є арифметичними прогресіями:
1) 2; 2; 2; …; 2) -10; -7; -4; …; 3) 100; 98; 95; …;
4) 10; 15; 21; 28; ..; 5) $\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};...;$ 6) 5; 0; 6; 0; …;
7) $\frac{1}{2};1;\frac{3}{2};...;$ 8) 1; -1; 1; -1; …?

31. Знайти різницю арифметичної прогресії:
1) $7\frac{1}{2};8\frac{3}{4};...;$ 2) 0; 5; …; 3) 7; 0; …; 4) -3; $-2\frac{1}{4};...$.

32. Знайти чотири члени арифметичної прогресії, у якої:
1) $a_1 = 2; d = 3;$ 2) $a_1 = 3; d = -2.$

33. Відомо два перших члени арифметичної прогресії: 7,2; 0,3; … . Знайти три наступних члени.

34. Знайти різницю і двадцять перший член арифметичної прогресії: 2; 5; 8; … .

35. Знайти перший член арифметичної прогресії, якщо $a_4 = 8; d = 2.$

36. Дано: $a_3 = 6; a_6 = 12.$ Знайти a_1 і d.

37. В арифметичній прогресії $a_8 = 12{,}4; a_{23} = 4{,}7.$ Обчислити $a_{14} + a_{17}.$

38. В арифметичній прогресії $a_2 + a_9 = 9,\ a_8 + a_4 = 5.$ Обчислити різницю прогресії.

39. В арифметичній прогресії $a_2 + a_{11} = 10,\ a_5 + a_6 = 13.$ Обчислити $a_1.$

40. Обчислити суму всіх парних натуральних чисел до 100 включно.

41. Знайти суму перших десяти членів арифметичної прогресії, якщо $a_1 = 1; a_{10} = 17.$

42. В арифметичній прогресії $a_1 = 2; d = -1.$ Знайти $S_{20}.$

43. Маємо арифметичну прогресію 2; 4; 6; … . Знайти $S_{101}.$

44. Знайти суму:
1) усіх натуральних чисел від 1 до 50;
2) усіх парних чисел від 1 до 30;
3) усіх двозначних натуральних чисел, кратних 5.

45. Арифметична прогресія задана формулою загального члена $a_n = 3n + 1$. Знайти S_{20}.

46 * **.** В арифметичній прогресії $S_{20} = 220, a_{10} = 32$. Знайти a_1.

47 * **.** В арифметичній прогресії $S_n = 0, a_1 = 3; d = -1$. Знайти кілька членів прогресії.

Геометрична прогресія, її властивості. Сума перших *n* членів геометричної прогресії

48. Які з наведених нижче послідовностей є геометричними прогресіями:

1) 3; 3; 3; …; 2) 5; 10; 15; …; 3) 2; 6; 8; …;

4) 1; 2; 6; ..; 5) $\sqrt{2}; 2; \sqrt{8}; ...;$ 6) $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; ...;$

7) $-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{8}; ...;$ 8) 1; 0,1; 0,01; …; 9) $\sqrt{2}-1; \sqrt{2}+1; ...$.

49. Знайти знаменник геометричної прогресії:

1) $3; \sqrt{3}; ...;$ 2) $1; \frac{1}{2}; ...;$ 3) $7; 14; ....;$ 4) $\sqrt{2}-1; \sqrt{2}+1; ...$.

50. Знайти чотири перших члени геометричної прогресії, у якої:

1) $b_1 = 4; q = 2;$ 2) $b_1 = 3; q = 1;$ 3) $b_1 = 81; q = \frac{1}{3};$

4) $b_1 = -2; q = -\frac{1}{2};$ 5) $b_1 = \sqrt{3}; q = -\sqrt{3}.$

51. Відомі два перших члени геометричної прогресії 8; 4: … . Знайти наступні три члени.

52. Знайти знаменник геометричної прогресії, у якої $b_5 = 9; b_6 = 18$. Знайти b_8.

53. Знайти знаменник геометричної прогресії, у якої $b_{2001} = 9; b_{2003} = 1$.

54. Дано: $b_2 = \sqrt{3}; b_4 = 4\sqrt{3}$. Знайти q і b_1.

55 * **.** Знайти *n*, якщо $b_1 = 2; q = 2; b_n = 64$.

56 * **.** Число 192 є членом геометричної прогресії 3; 6; 12; … . Знайти номер цього члена.

57. У геометричній прогресії $b_1 = 1; q = 2$. Знайти S_7.

58. Дано геометричну прогресію $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; ...$. Знайти S_5.

59 * **.** У геометричній прогресії $S_6 = 3; q = 2$. Знайти b_1.

60. Знайти перший член нескінченної геометричної прогресії, сума якої дорівнює 10, а знаменник $\frac{1}{2}$.

61. Знайти третій член нескінченної геометричної прогресії, сума якої дорівнює 30, а перший член 20.

62. Три різні цілі числа утворюють геометричну прогресію. Їх сума дорівнює –3. Знайдіть ці числа.

Рівняння та системи рівнянь

63. Розв'язати рівняння:

1) *2(x-3) = 36;* 2) *4(5-x) =12;* 3) *0,1(x+1) = 1;*
4) *2(3x-5) = 20;* 5) *(8-z)·7 = 28;* 6) *4(x+1) +11 = 31;*
7) *5(y-3)-12 = 73;* 8) *16 + 3(z-2) = 1;* 9) *47 + 2(x+4) = 7;*
10) $3(1-2x)=15$; 11) $5\frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x = 3\frac{1}{5} - \frac{1}{2}x$; 12) *0,1x-7=9-0,4x;*
13) $-\frac{7}{9}a + \frac{1}{3}a = 12$; 14) $\frac{2}{9} + \frac{x-2}{3} = \frac{5}{9}$; 15) $\frac{z-3}{5} + \frac{1}{30} = 1$.

64. Розв'язати рівняння:

1) $x^2 - 7x = 0$; 3) $x^2 - 12x + 24 = 0$; 5) $2x^2 - 5x + 3 = 0$;
2) $4x^2 - 5 = 0$; 4) $-x^2 - 8x + 9 = 0$; 6) $16x^2 + 24x + 9 = 0$.

65. Розв'язати рівняння:

1) $\sqrt{x} = 7$; 2) $3 - \sqrt{x} = 0$; 3) $z\sqrt{z} = 0$;
4) $\sqrt{x+3} = 0$; 5) $\sqrt{2+x} = -3$.

66. Розв'язати рівняння:

1) $|x| = 5$; 2) $|x| = 0$; 3) $|x| = -2$;
4) $|x| + 2 = 3$; 5) $2|x| - 1 = 4$; 6) $2|x| + 3 = 0$;
7) $|x-4| = 2$; 8) $|x+2| + 3 = 5$; 9) $|x+1| + 7 = 4$.

67. Спростити вираз:

1) $(4-\sqrt{3})(4+\sqrt{3})$; 2) $(1+\sqrt{5})^2 - \sqrt{20}$; 3) $(2+\sqrt{9x})(2-\sqrt{9x})$;
4) $(a+\sqrt{a}) \div (\sqrt{a}+1)$; 5) $(2\sqrt{3}-1)(\sqrt{12}+1)$; 6) $(2-\sqrt{5})^2 + \sqrt{80}$.

68. Розв'язати систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 2x + y = 12 \\ 3x - 5y = 5 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x - 4y = 11 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} 6x - 4z = 5 \\ 4x + 1.5z = 1 \end{cases}$;
4) $\begin{cases} 2x - 3y = -3 \\ x + 3y = 21 \end{cases}$; 5) $\begin{cases} 6a - 3в = 4 \\ 2a - в = 5 \end{cases}$; 6) $\begin{cases} 9x + 2y - 4 = 0 \\ 8x + y - 2 = 0 \end{cases}$;
7) $\begin{cases} x + y = 14 \\ x - y = 8 \end{cases}$; 8) $\begin{cases} x + y = 96 \\ 3x = 2y \end{cases}$; 9) $\begin{cases} 7(2x+y) - 5(3x+y) = 6 \\ 3(x+2y) - 2(x+3y) = -6 \end{cases}$.

69. Знайти область визначення функції: 1) $y = \sqrt{6 + x - x^2}$; 2) $y = \frac{2x+7}{3x-6}$.

70. Графіком якої з наведених функцій є пряма?

1) $y = \sqrt{9x} + 2$; 2) $y = 2 - \frac{x}{9}$; 3) $y = 9x^2 + 2$; 4) $y = 2 - \frac{9}{x}$.

71. Побудувати графіки функцій:

1) $2x - 3 = y$; 2) *-x -7y =7*; 3) $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 8$.

Розв'язування задач за допомогою лінійних рівнянь. Рівняння як математична модель задачі

72. Сума двох чисел дорівнює 16. Одне з них у 3 рази більше за інше. Знайти ці числа.
73. Одне з чисел у 5 разів менше від іншого. Їхня різниця дорівнює 12,4. Знайти ці числа.
74. Сума двох чисел дорівнює 100, а їхнє відношення 3:7. Знайти ці числа.
75. Книжка коштує у 2,5 рази більше ніж альбом, а разом вони коштують 7 грн. Скільки коштує книжка і скільки альбом?
76. За два дні було продано 90 кг цукерок, причому другого дня продали $\frac{4}{5}$ того, що продали першого дня. Скільки кілограмів цукерок продавали кожного дня?
77. Туристи за другий день подолали $\frac{3}{4}$ відстані, пройденої за перший день. Скільки кілометрів долали туристи кожного дня, якщо за перший день було пройдено на 3 км більше, ніж на другий?
78. Кількість відмінників 7«А» класу складає 60% від кількості відмінників 7«Б» класу. Разом у цих класах 16 відмінників. Скільки відмінників у кожному класі?
79. Другого дня робітник виточив деталей на 10% більше, ніж першого дня. За два дні разом він виточив 105 деталей. Скільки деталей робітник виточував кожного дня?
80. Іван мав цукерок у 3 рази більше, ніж Василь. Коли Василю дали 12 цукерок, то їх у хлопців стало порівну. Скільки цукерок мав кожний хлопець спочатку?
81. На одній сторінці альбому марок було у 2 рази більше, ніж на іншій. Коли з цієї сторінки переклеїли 10 марок на іншу, то марок на сторінках стало порівну. Скільки марок було спочатку на кожній сторінці?

Нерівності та їх системи

82. Знайти множину розв'язків нерівності:

1) $6 - 4x > 7 - 6x$;
2) $12 - 5x < 3 - 2x$;
3) $8 + 6y < 2\,(5y - 8)$;
4) $7a - 3 \geq 7\,(a + 1)$;
5) $4\,(2 + 3b) - 3\,(4b - 3) > 0$;
6) $\frac{12 - 9x}{7} \geq 7$;
7) $7(2-x) \leq 3x + 44$;
8) $x^2 + 14x + 49 \geq 0$
9) $x^2 - 8x + 7 > 0$;
10) $x^2 + x - 2 \leq 0$;
11) $9 - x^2 \geq 0$;
12) $6x^2 - 2x < 0$;
13) $-x^2 + 3x + 4 > 0$;
14) $0{,}2x^2 > 1{,}8x$;
15) $5 - 4x - x^2 \geq 0$;
16) $x^2 - 10x + 25 > 0$;
17) $x^2 - 4x - 12 < 0$.

83. Розв'язати системи нерівностей:

1) $\begin{cases} 2x - 1 > 14 \\ 2 - x < 8 \end{cases}$;
2) $\begin{cases} x - 3 < 5 \\ 4x + 2 > 9 \end{cases}$;
3) $\begin{cases} 2x \geq x + 4 \\ 5x \leq 7 - 2x \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2-5x<7 \\ 3x+1<-8 \end{cases}$; 5) $\begin{cases} c^2-3<(c+3)^2 \\ 2c+c^2\geq(c-2)^2 \end{cases}$.

Геометричні задачі

84. У прямокутному трикутнику гіпотенуза і катет рівні відповідно 10см і 6 см. Знайти площу трикутника.

85. Знайти площу квадрата, якщо відомо що його діагональ рівна $6\sqrt{2}$ см.

86. Сторона прямокутника рівна 8 см, а його діагональ – 10 см. Знайти периметр прямокутника.

Розділ 2. ФУНКЦІЇ, ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІКИ

Числові функції. Способи задання функцій. Область визначення і множина значень функції.

87. Чи є функціями залежності:

1) $y = xy + x^2$; 2) $x + \sin x = y$; 3) $x = y + \sqrt{y}$;

4) $y = \frac{x}{C+1}$; 5) $xy = x + 17$; 6) $t = tgt = w$?

Для функцій назвіть незалежну змінну (аргумент) та залежну (функцію).

88. Функція задана формулою $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$. Знайти:

1) $f(0)$; 2) $f(-3)$; 3) $f(a)$.

89. Функція задана формулою $f(x) = \sqrt{x+5}$. Знайти:

1) *f(0)*; 2) *f(8);* 3) *f(3)* .

90. Дано функцію $y = \frac{2x+1}{x+1}$. Знайдіть значення аргументу, за яких функція набуває значення: 1)-2; 2) 2; 3)3.

91. Знайти область визначення функції:

1) $y = \frac{6}{x-1}$; 2) $y = \sqrt{x-2}$; 3) $y = \sqrt[3]{\frac{3x-5}{x+2}}$;

4) $y = \frac{2}{3x} + \frac{2x}{3}$; 5) $y = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+2}$; 6) $y = \frac{1}{x^2+5x+6}$;

7) $y = \sqrt{\frac{x-5}{2x+3}}$; 8) $y = \frac{2x}{x^2-5x+6}$; 9) $y = \sqrt{x^2+x-2}$;

10) $y = \sqrt{x} + \sqrt{3-x}$; 11) $y = \frac{4}{\sqrt{25-x^2}}$; 12) $y = \frac{x}{|x|}$;

13) $y = \frac{3}{x^2-1}$; 14) $y = \frac{2}{x} - \frac{1}{x-5}$; 15) $y = \frac{x}{x^2+x+1}$;

16) $y = \sqrt{16-x^2}$; 17) $y = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+3}$; 18) $y = \frac{9}{x-1} + \frac{17}{x^2+8x}$;

19) $y = \frac{5x+1}{x^2+4}$; 20) $y = \frac{5x+1}{x^2-4}$; 21) $y = \frac{1}{2-|x|}$;

22*) $y = \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$; 23*) $y = \sqrt{2-|x|}$; 24*) $y = \sqrt{|x|+5}$;

25*) $y = \sqrt{x} + \sqrt{2-x}$; 26*) $y = \sqrt{1-x} + \sqrt{x-3}$; 27) $y = \sqrt{x} + \frac{1}{|x|-3}$.

92. Навести приклад функції, областю визначення якої є:

1) уся числова пряма;

2) уся числова пряма, крім точки *x=3*;

3) уся числова пряма, крім точок *x=1* і *x=-1*;

4) інтервал $[0;+\infty)$;

5) відрізок $[-2;2]$.

93. Які з представлених на рис. 1-4 ліній є графіками функцій?

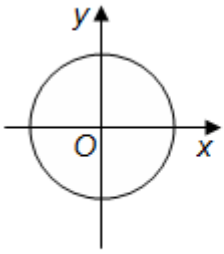


Рис. 1

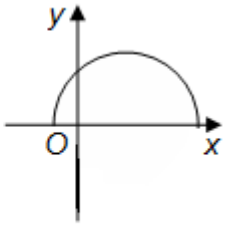


Рис. 2

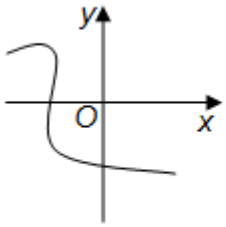


Рис. 3

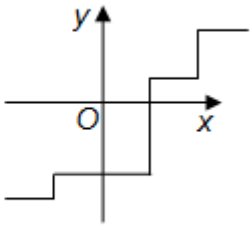


Рис. 4

94. Для графіків функцій на рис. 5-8 вказати:

1) область визначення;
2) область значень;
3) нулі функції;
4) координати точок перетину з осями;
5) проміжки знакосталості функції;
6) найбільше та найменше значення функції.

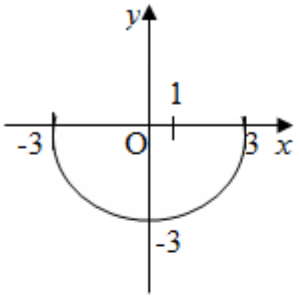


Рис. 5

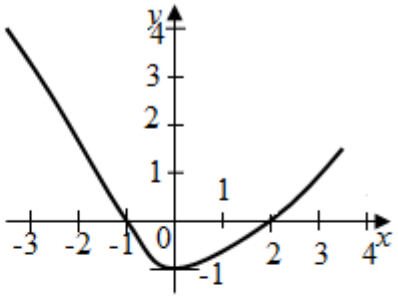


Рис. 6

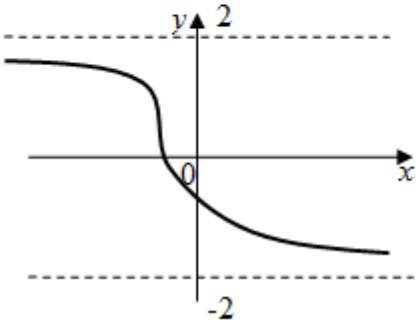


Рис. 7

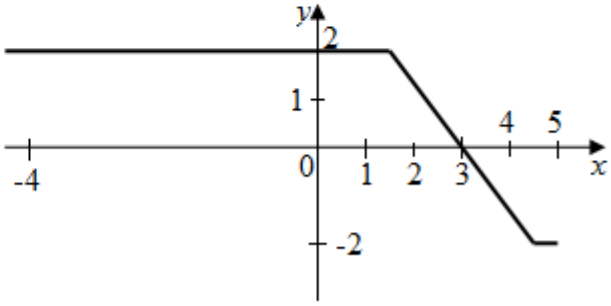


Рис. 8

95. Знайти значення функції в точках $-1;\frac{1}{2};10.$

1) $f(x)=x+\frac{1}{x}$; 2) $f(x)=\sqrt{5x-x^2}$; 3) $f(x)=x^2-5x+6$.

96. Знайти значення функції, заданої формулою:

1) $y=2x-3$ для значень аргументу, що дорівнюють -2; 0; 1; 17.

2) $y=-\frac{9}{x}$ для значень аргументу, що дорівнюють -9; -3; 1; 3; 9; 18.

3) $y=x^2-2$ для значень аргументу, що дорівнюють -2; 0; 1; 2; 3,5.

97. Знайти область значень функцій:

1) $y = x^2$; 2) $y = x^2 + 2$; 3) $y = \frac{2}{x}$;

4) $y = \sqrt{x}$; 5) $y = \sqrt{x-2}$; 6) $y = x^3$;

7) $y = \sqrt{x^2} + 1$; 8) $y = \sqrt{x^2} + x$; 9*) $y = \frac{x}{|x|}$.

98. Які з точок *A(0;-1), B(-1;1), C(1;-1)* належать графіку функції $y = 3x^2 + x - 1$?

99. Назвати кілька точок, що належать графіку функції $y = x^2 + 1$.

100. Функція задана формулою $y = \frac{3}{5}x$. Заповни порожні клітинки таблиці.

x	-5	-2	0	6
y	-2,4	0,6	1,2	6

101. Знайти нулі функції:

1) $y = x - 1$; 2) $y = 3x - 6$; 3) $y = 2$;

4) $y = x^2 - 9$; 5) $y = \frac{x}{5}$; 6) $y = \frac{x-5}{7}$;

7) $y = \frac{x-1}{x}$; 8) $y = 1\frac{3}{5}x^2 + 1\frac{3}{10}x$; 9) $y = \frac{x^2-1}{x-1}$;

10) $y = \frac{x+1}{x^2-1}$; 11*) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$; 12*) $y = \frac{x-1}{x^2-2x+1}$.

Зростаючі та спадні, парні та непарні функції

102. На рис. 9 подано графік функції $y = f(x)$ при $x \in [-6;6]$.

1) Назвати проміжки зростання та спадання функції.

2) Чи є функція парною; непарною?

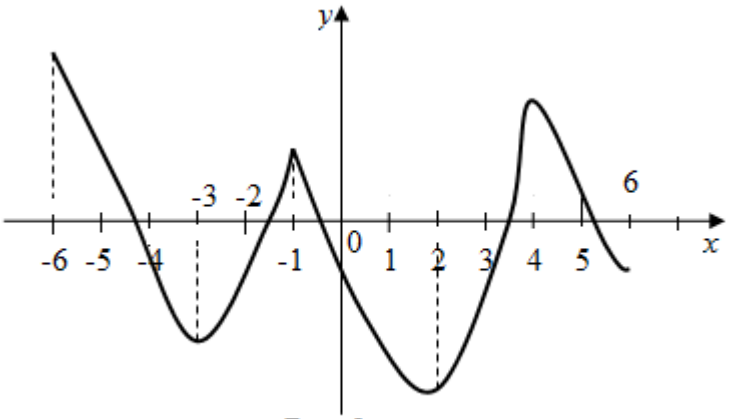


Рис. 9

103. Чи є монотонною задана функція? Чи є вона зростаючою, чи спадною?

1) *y=-5x+1;* 2) $y = x^3$; 3) $y = \sqrt{x}$;

4) $y = \frac{3}{x}$; 5) $y = x^2, x \geq 0$; 6) $y = |x|$.

104. Яка з наведених функцій зростає на всій області визначення?

1) $f(x) = x^2$; 2) $f(x) = 3 + \frac{x}{2}$; 3) $f(x) = \frac{1}{x}$; 4) $f(x) = 2 - 3x$.

105. Функція f зростає на проміжку $[-8;8]$. Порівняти:

1) $f(2)$ і $f(-3)$; 2) $f\left(\frac{1}{8}\right)$ і $f\left(\frac{1}{7}\right)$.

106. Функція g спадна на проміжку $[-4;8]$. Порівняти:

1) $g(1)$ і $g(-1)$; 2) $g\left(-\frac{1}{3}\right)$ і $g\left(-\frac{1}{4}\right)$.

107. Знайти проміжки зростання і спадання функції:

1) $y=-x^2+4x$; 2) $y=3x^2-6x+4$; 3) $y=(x+1)(x-2)$;

4) $y=\sqrt{x+1}$; 5) $y=\frac{1}{x+2}$.

108. Відомо, що $f(-2)=10$. Знайти $f(2)$, якщо f:

1) парна; 2) непарна.

109. Які з функцій, графіки яких наведені на рис. 10-15, парні, а які – непарні? Які функції ні парні, ні непарні?

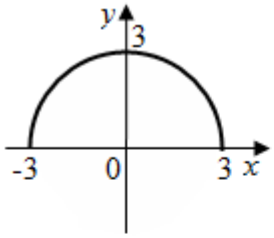


Рис. 10

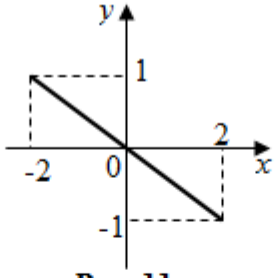


Рис. 11

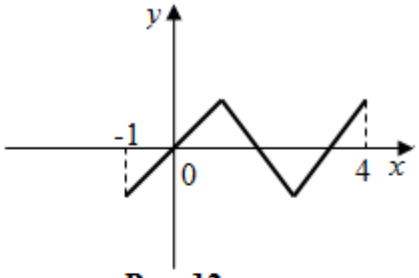


Рис. 12

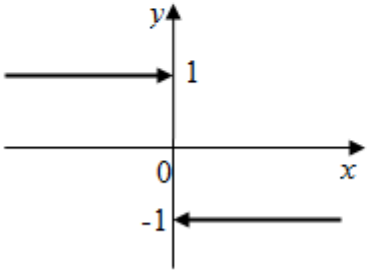


Рис. 13

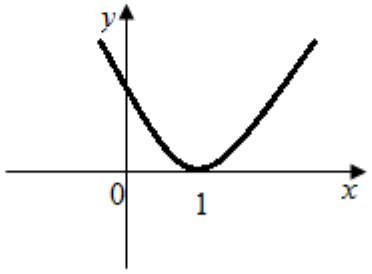


Рис. 14

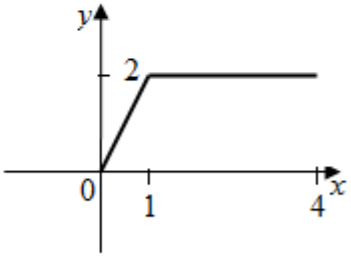


Рис. 15

110. Дослідити на парність і непарність функцію:

1) $y=x+x^3$; 2) $y=x^2-2$; 3) $y=\frac{x^3}{x^2+1}$;

4) $y=x+\frac{1}{x}$; 5) $y=\sqrt{1-x^2}$; 6) $y=\sqrt[3]{x^2}$;

7) $f(x)=x^2+5$; 8) $f(x)=\frac{x^4+1}{2x^3}$; 9) $f(x)=\frac{5}{x}+4$;

10) $y=5x^3-x$; 11) $y=x^2-3$; 12) $y=\frac{x^2}{x^4-1}$;

13) $y=\sqrt{x}+1$; 14) $y=|x|+x^2-4$; 15) $y=3$;

16) $f(x)=\dfrac{3x}{x^6+2}$; 17) $y=x^4-2x^2+3$; 18) $y=\sqrt{x}$;

19) $y=\sqrt[3]{x}$; 20) $y=x^3-5x+1$; 21) $y=\dfrac{x^2-x}{x-1}$;

22) $y=x^2-x$; 23*) $y=|x^5|$; 24*) $y=\dfrac{x}{|x|}$.

Неперервність функцій

111. Серед функцій, зображених на рисунках 16-21, назвати неперервні в точці 1 функції:

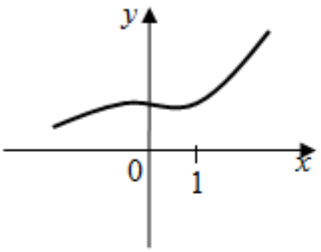


Рис. 16

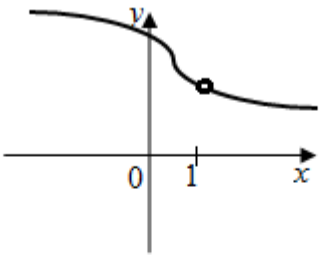


Рис. 17

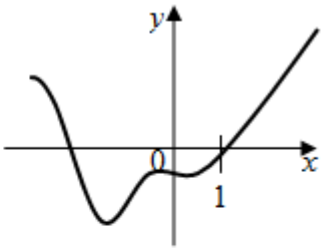


Рис. 18

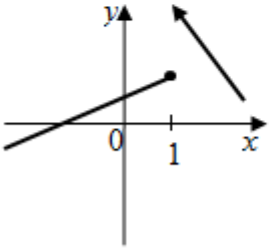


Рис. 19

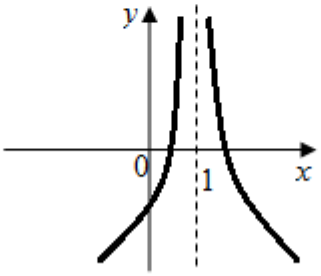


Рис. 20

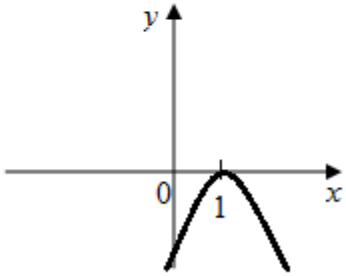


Рис. 21

112. Знайти проміжки неперервності функції:

1) $y=2x+3$; 2) $y=\dfrac{1}{x}$; 3) $y=3x^2-2x+11$;

4) $y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$; 5) $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}$; 6) $y=\dfrac{x^5}{x^2-1}$.

113. Дослідити на неперервність функцію:

1) $f(x)=\dfrac{3x+1}{x^2+1}$; 2) $g(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$.

114. Знайти точки розриву функції, якщо вони існують:

1) $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}$; 2) $y=\begin{cases}2x, x<0\\ x^2, x\ge 0\end{cases}$; 3) $y=\dfrac{x}{x^2+4}$;

4) $y=\dfrac{7}{x^2-7}$; 5) $y=\dfrac{1}{x^2+x+4}$; 6) $y=\dfrac{x-1}{x^2+2x-3}$;

7) $y=\dfrac{x}{x^2+5x+2}$; 8) $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3-1}$; 9) $y=\dfrac{x^2-1}{x+1}$.

115. Чи є неперервною на множині дійсних чисел функція:

1) $f(x)=\begin{cases}x+1, x<0,\\ x^2+1, x\ge 0;\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}x+1, x<0,\\ (x+1)^2, x\ge 0;\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases}x^3, x\le 0,\\ x+3, x>0;\end{cases}$ 4) $f(x)=\begin{cases}x-2, x<2,\\ x, x>0.\end{cases}$

116. У яких точках функція $y=\dfrac{1}{x^2-x}+\dfrac{1}{x+3}$ не є неперервною?

117*. Навести приклад функції, яка неперервна в усіх точках числової прямої, крім двох.

118*. Навести приклад функції, яка неперервна в усіх точках числової прямої, крім точок $x=2$ і $x=-1$.

119*. Навести приклад функції, яка є неперервною на проміжках $[0;2)$ і $(2;+\infty)$ і не є неперервною в усіх інших точках.

Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень відомих графіків функцій

120. На рис. 22 зображено графіки функцій $y=\sqrt{x}$; $y=\sqrt{x}+2$ і $y=\sqrt{x+2}$. Встановити відповідність між графіками і функціями.

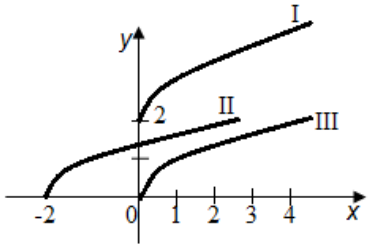


Рис. 22

121. Задано графік функції $y=f(x)$. Які перетворення треба виконати, щоб отримати графік функції:

1) $y=f(x)+3$; 2) $y=f(x)-2$; 3) $y=f(x+2)$;

4) $y=f(x-4)$; 5) $y=-f(x)$; 6) $y=3-f(x)$;

7) $y=|f(x)|$; 8) $y=3f(x)$; 9) $y=\dfrac{1}{2}f(x)$?

122. Побудувати графік функції :

1) $y=\dfrac{1}{x}$; 2) $y=\dfrac{1}{x+2}$; 3) $y=\dfrac{1}{x-2}$;

4) $y=\sqrt{x}$; 5) $y=-\sqrt{x+1}$; 6) $y=-\sqrt{x-1}$;

7) $y=|x|$; 8) $y=|x-3|$; 9) $y=|x+3|$;

10) $y=x^3$; 11) $y=|x^3|+4$; 12) $y=\dfrac{1}{2}|x^3+4|$;

13) $y=x^2-5x+6$; 14) $y=x^2-5|x|+6$; 15) $y=\dfrac{6}{2-x}$;

16) $y=\sqrt{1-x}$; 17) $y=|x^2-5x+6|$; 18) $y=|2x-3|$;

19) $y=2-\sqrt{-x}$; 20) $y=|2x+3|$; 21) $y=\left(|x|-\dfrac{1}{2}\right)^3+1$;

123. Побудувати графіки функцій:

1) $y = x^2 - 2$; 2) $y = (x-2)^2$; 3) $y = 3x^2 - 1$;

4) $y = 4 - x^2$; 5) $y = \sqrt{x} - 1$; 6) $y = 1 - \sqrt{1-x}$;

7) $y = (x - 0{,}5)^3$; 8) $y = \frac{1}{x-2}$; 9) $y = -(x^2 + 2)$;

10) $y = 2x^2 - 1$; 11) $y = (x+2)^3$; 12) $y = 3\sqrt{x}$;

13) $y = -\sqrt{x+2}$; 14) $y = |x^2 - 2|$; 15) $y = |x^2 - 5x + 6|$.

124. При яких значеннях *a* точка *P(4;4)* належить графіку функції $y = a\sqrt{x}$.

125. Побудувати графік функції:

1) $y = \begin{cases} x^2 - 4, при x \geq 2 \\ 2 - x, при x < 2 \end{cases}$; 2) $y = \begin{cases} 3 - x^2, при x > 1 \\ x - 2, при x \leq 1 \end{cases}$.

129. Побудувати графік та знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

1) $y = \frac{1}{(x-2)^2} + 1$; 2) $y = 4|x| - x$; 3) $y = x^2 - 4x$.

130. Дано функцію $f(x) = \begin{cases} x + 1, якщо x \leq 0 \\ x - 1, якщо x > 0. \end{cases}$

1) Побудувати графік функції.
2) Вказати проміжки її зростання та спадання.
3) Чи є функція парною або непарною?
4) Змінити значення функції в одній точці так, щоб вона стала непарною.

131. Дано функцію $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, якщо x \leq 0, \\ x^2 + 1, якщо x > 0. \end{cases}$

1) Побудувати графік функції;
2) вказати проміжки зростання чи спадання функції;
3) нулі функції та проміжки знакосталості;
4) точки екстремуму функції;
5) найбільше та найменше значення функції;
6) кількість коренів рівняння *f(x)=1;*
7) всі значення *a,* при яких рівняння *f(x)=a* має два корені.

132. Дано функцію $f(x) = \begin{cases} x - 3, якщо x \leq 0, \\ x^2 - 2, якщо x > 0. \end{cases}$

1) Побудувати графік функції;
2) вказати проміжки зростання чи спадання функції;
3) точки екстремуму функції;
4) найбільше та найменше значення функції;
5) кількість коренів рівняння *f(x)=1;*
6) всі значення *a,* при яких рівняння *f(x)=a* має два корені.

133. Скільки коренів має рівняння:

1) $\sqrt{x+1} = x^2$; 2) $x^3 = \frac{1}{x-1}$; 3) $2x^3 = 8x - 1$;

4) $\frac{x}{x-1} = x^2 - x - 2$; 5) $\sqrt{x} = \frac{8}{x}$; 6) $\frac{x}{x-1} = 1 - x^2$.

Дослідження властивостей функції за її графіком

134. На рис. 24 зображено графік функції.

Знайти:

1) область визначення функції;
2) множину значень;
3) нулі функції та проміжки знакосталості;
4) проміжки зростання, спадання, сталості функції;
5) неперервність функції;
6) точки розриву функції.

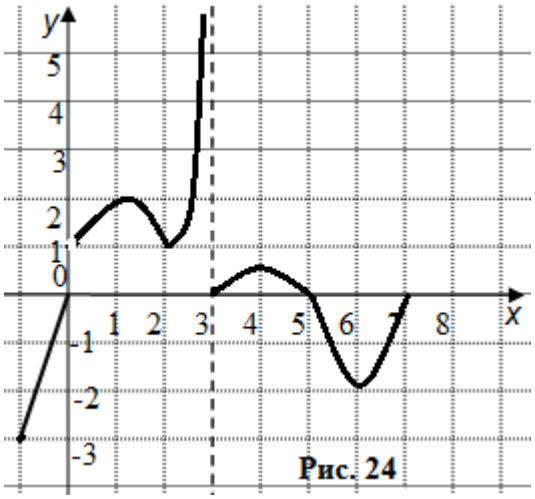


Рис. 24

135. На рис. 25, 26 зображено графіки деяких функцій. Знайти:

1) області визначення цих функцій;
2) множину їхніх значень;
3) нулі функції та проміжки знакосталості;
4) проміжки зростання, спадання, сталості функції;
5) неперервність функції;
6) точки розриву функції.

136. На рис. 26 зображено графік зміни температури повітря протягом доби. Знайти:

1) температуру повітря о 6 год., опівдні, о 18 год.
2) коли температура повітря дорівнює нулю;
3) коли температура повітря була нижчою від нуля;
4) протягом якого часу температура підвищувалась, знижувалась, була сталою;
5) найнижчу і найвищу температуру.

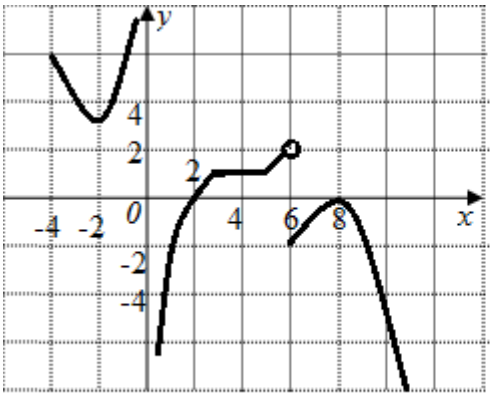


Рис. 25

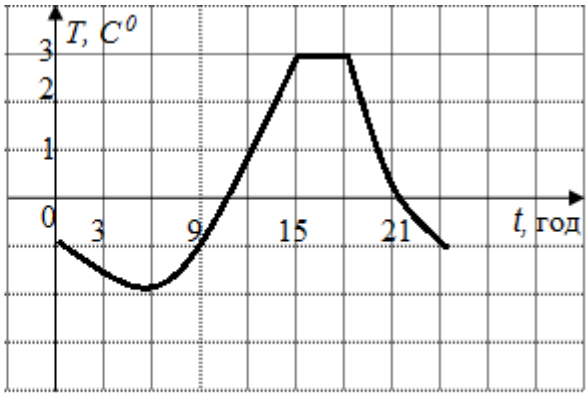


Рис. 26

137. За графіком функції $y=f(x)$ (рис. 27) знайти:

1) проміжки зростання та спадання функції;
2) точки екстремуму функції;
3) найбільше та найменше значення функції;
4) кількість коренів рівняння $f(x)=0,5$;
5) всі значення a, при яких рівняння $f(x)=a$ має два корені.

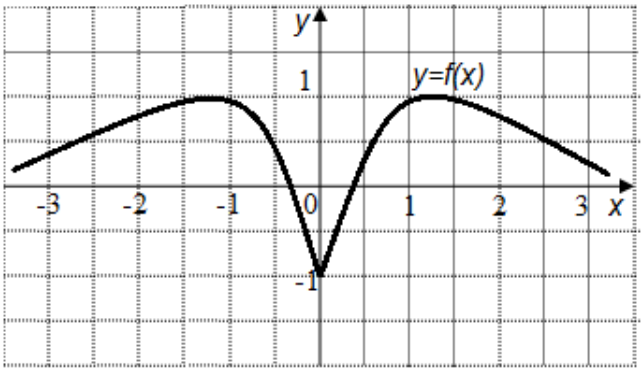


Рис. 27

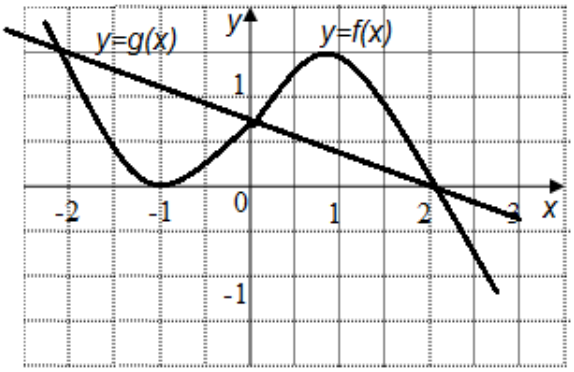


Рис. 28

138. На рис. 28 зображено графіки функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$, областями визначення яких є проміжок $(-\infty;+\infty)$.

1) Скільки коренів має рівняння $f(x) - g(x) = 0$?
2) Чи справджується нерівність $f(x_0) \geq g(x_0)$, де x_0 - це точка максимуму функції $y = f(x)$?
3) Розв'язати нерівність $f(x) \geq g(x)$.

139. На рис. 30 зображено графік функції *y=f(x)*. Які з поданих нижче властивостей має ця функція?

1) Областю визначення є відрізок $[-2;2]$;
2) множиною значень є проміжок $(-1;2]$;
3) функція зростає на проміжку $(-1;1]$;
4) функція має дві точки екстремуму;
5) функція має одну точку екстремуму;
6) найбільше значення функції дорівнює 2;
7) найменше значення функції дорівнює -1.

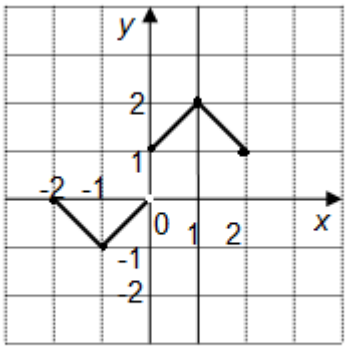


Рис. 30

Життєва математика

140. Машина таксі за місяць проїхала 6000 км. Витрати пального для цієї автівки в середньому складають 9 літрів на 100 км. Вартість пального – 22 грн/л. Скільки було витрачено на бензин за цей місяць?

Корінь *n*–го степеня. Арифметичний корінь *n*-го степеня та його властивості

141. Знайти значення кореня:

1) $\sqrt[3]{8}$; 2) $\sqrt[4]{81}$; 3) $\sqrt[5]{0}$; 4) $\sqrt[7]{1}$; 5) $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$.

142. Знайти значення виразу:

1) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{500}$; 2) $\sqrt[4]{324} \cdot \sqrt[4]{4}$; 3) $\sqrt[3]{-1\frac{91}{125}}$; 4) $\sqrt[3]{3^6 \cdot 4^9}$;

5) $\sqrt[5]{\frac{7^{10}}{3^5}}$; 6) $\sqrt[3]{0{,}027\cdot 3^6}$; 7) $\sqrt[5]{\frac{7^{10}}{3^5}}$;

8) $\sqrt[4]{48\cdot 27}$; 9) $\sqrt[5]{162\cdot 48}$; 10) $\sqrt[4]{\sqrt{95}-\sqrt{14}}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{95}+\sqrt{14}}$.

143. Подати вираз у вигляді дробу:

1) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$; 2) $\sqrt[3]{\frac{64}{15}}$; 3) $\sqrt[4]{\frac{5}{81}}$; 4) $\sqrt[4]{\frac{625}{256}}$.

144. Обчислити:

1) $\sqrt[3]{243}:\sqrt[3]{9}$; 2) $\sqrt[3]{256}:\sqrt[3]{4}$; 3) $\sqrt[3]{250}:\sqrt[3]{2}$;

4) $\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}$; 5) $\sqrt[6]{\frac{2^{12}}{3^6}}$; 6) $\sqrt[5]{6^5\cdot 0{,}1^{10}}$;

7) $\sqrt[3]{48}:\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$; 8) $0{,}3\sqrt[3]{1000}+\frac{1}{5}\sqrt[3]{125}$; 9) $5\sqrt[4]{16}-13\sqrt[17]{1}$.

145. Подати вираз у вигляді кореня з деякого числа:

1) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{5}}$; 2) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{10}}$; 3) $\sqrt[3]{\sqrt{4}}$; 4) $\sqrt[4]{\sqrt[5]{12}}$; 5) $\sqrt[3]{2\sqrt{5}}$; 6) $\sqrt[5]{4\sqrt[3]{3}}$.

146. Розв'язати рівняння:

1) $x^3=8$; 2) $x^6=5$; 3) $x^8=-9$;

4) $\sqrt[3]{x}-2=0$; 5) $\sqrt[3]{x}+3=0$; 6) $\sqrt[4]{x}-0{,}2=0$;

7) $x^3+27=0$; 8) $\sqrt[8]{x}+3=0$.

147. Спростити вираз:

1) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}b^3}$; 2) $\sqrt[5]{243d^{15}}$; 3) $\sqrt[4]{16a^4}, a>0$; 4) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}c^4}, c<0$.

148. Скоротити дріб:

1) $\frac{7+\sqrt{7}}{\sqrt{7}+1}$; 2) $\frac{a-1}{\sqrt{a}+1}$; 3) $\frac{a-81b}{\sqrt{a}-9\sqrt{b}}$; 4) $\frac{8a-1}{4\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[3]{a}+1}$.

149. Винести множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt[3]{250}$; 2) $\sqrt[4]{405}$; 3) $\sqrt[3]{54a^7}$; 4) $\sqrt[4]{32b^6}$;

5) $\sqrt[4]{5a^6}, a<0$; 6) $\sqrt[4]{16a^3b^{11}}$; 7) $\sqrt[3]{27m^8n^2g^{17}}$; 8) $\sqrt[4]{16a^8b^{10}c^{25}}$.

150. Внести множник під знак кореня:

1) $-5\sqrt[5]{5}$; 2) $b\sqrt[6]{2}, b\le 0$; 3) $ab\sqrt[4]{2}, a\ge, b\le 0$; 4) $b\sqrt[4]{-b}$.

151. Спростити вираз:

1) $2\sqrt{5}-2\sqrt{45}+2\sqrt{20}$; 2) $\sqrt[3]{40}+\sqrt[4]{162}-3\sqrt[4]{2}-2\sqrt[3]{5}$;

3) $4\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{135}-\sqrt[3]{384}-\sqrt[3]{40}$; 4) $\left(\sqrt{12}+\sqrt{75}+\sqrt{27}\right):\sqrt{15}$;

5) $\left(\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt[3]{16}+3\sqrt[3]{8}+9\sqrt[3]{4}\right)$; 6) $\left(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{27}\right)\left(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{27}\right)$;

7) $\left(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{27}\right)^2-4\sqrt{3}$; 8) $\left(7\sqrt{6\sqrt{6}}-6\sqrt[4]{216}\right)^4$.

152. Знайти область визначення функцій:

1) $y=\sqrt[4]{5x-15}$; 2) $y=\sqrt[3]{x^2-1}$; 3) $y=\sqrt{x^2-1}$; 4) $y=\sqrt[5]{\frac{x}{x+1}}$.

153. Звільніться від ірраціональності у знаменнику дробу:

1) $\frac{9}{5-\sqrt{7}}$; 2) $\frac{a-b}{\sqrt{a-b}}$; 3) $\frac{2}{\sqrt{3}+1}$;

4) $\frac{6}{\sqrt[3]{5}+1}$; 5) $\frac{10}{\sqrt{17}+\sqrt{2}}$; 6) $\frac{9}{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{2}+1}$.

154. Обчислити площу прямокутника, якщо його сторони дорівнюють:

1) $\sqrt{2}$ і $\sqrt{8}$; 2) $\sqrt[3]{17}$ і $\frac{1}{\sqrt[3]{17}}$; 3) $3\sqrt{2}$ і $2\sqrt{5}$;

4) $3\sqrt{2}$ і 2; 5) $\sqrt[5]{\frac{2}{3}}$ і $\sqrt[5]{\frac{3}{2}}$; 6) $\sqrt{\frac{8}{3}}$ і $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

155. Порівняти числа:

1) $\sqrt{3}$ і $\sqrt[4]{9}$; 2) $\sqrt{2}$ і $\sqrt[4]{16}$; 3) $\sqrt{5}$ і $\sqrt[4]{24}$;

4) $\sqrt{2}$ і $\sqrt[3]{3}$; 5) $\sqrt[5]{5}$ і $\sqrt{2}$; 6 *) $\sqrt[10]{11}$ і 1.

156. Виконати дії:

1) $3\sqrt[5]{2a^2}\cdot 5\sqrt[5]{10a}\cdot 7\sqrt[5]{24a}$; 2) $8\sqrt[7]{14a^6}:10\sqrt[7]{ab^3}$.

157. Обчислити:

1) $\left(5\sqrt[3]{40}-10\sqrt[3]{5}\right)\cdot 0{,}5\sqrt[3]{25}$; 2) $\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}\right)+\sqrt{5}\left(\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)-\sqrt{6}\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)$.

158. При яких значеннях x має зміст вираз:

1) $\sqrt[6]{2x-x^2}$; 2) $\sqrt[5]{x^2-2x-3}$;

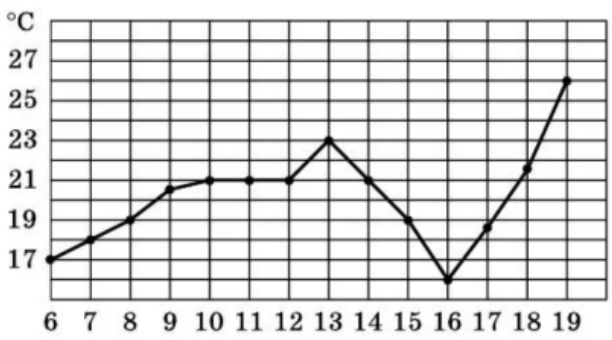
3) $\sqrt[4]{x^2+2x-8}$; 4) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt{x^2-4}$.

159. Знайдіть два послідовних цілих числа, між якими міститься число:

1) $\sqrt[3]{1{,}2}$; 2) $-\sqrt[4]{0{,}85}$; 3) $\sqrt[5]{33}$; 4) $-\sqrt[3]{7{,}8}$.

Життєва математика

160. На малюнку точками позначено щоденну середньодобову температуру повітря в Одесі з 6 по 19 червня. По горизонталі вказано дату місяця, по вертикалі – температуру у градусах Цельсія. Для наочності точки з'єднано лінією. Визначте по малюнку різницю між найбільшою і найменшою середньодобовими температурами у вказаний період. Відповідь подайте у градусах Цельсія.



Степені з раціональними показниками, їх властивості

161. Подати вираз у вигляді степеня з раціональним показником:

1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt[3]{5}$; 3) $\sqrt[5]{11}$; 4) $\sqrt[4]{x^3}$;

5) $\sqrt[7]{a^6}$; 6) $\sqrt{y^{11}}$; 7) $\sqrt[4]{\frac{1}{a}}$; 8) $\sqrt[3]{b^{-2}}$.

162. Замінити степінь з дробовим показником коренем:

1) $2^{\frac{1}{2}}$; 2) $4^{\frac{1}{3}}$; 3) $7^{\frac{1}{4}}$; 4) $3^{\frac{2}{3}}$;

5) $5a^{\frac{1}{3}}$; 6) $3^{-\frac{1}{4}}$; 7) $2a^{-\frac{2}{5}}$; 8) $(4b)^{\frac{1}{2}}$;

9) $(7c)^{\frac{2}{3}}$; 10) $(a-b)^{\frac{2}{5}}$; 11) $5(x+y)^{\frac{1}{9}}$; 12) $(7m)^{-\frac{2}{9}}$.

163. Обчислити без використання обчислювальних засобів:

1) $81^{\frac{3}{4}}$; 2) $32^{\frac{3}{5}}$; 3) $16^{\frac{1}{4}}$; 4) $169^{\frac{1}{2}}$;

5) $64^{\frac{1}{6}}$; 6) $27^{\frac{2}{3}}$; 7) $4^{-\frac{1}{2}}$; 8) $0{,}01^{-\frac{3}{2}}$;

9) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$; 10) $\left(\frac{25}{36}\right)^{\frac{3}{2}}$; 11) $\left(\frac{81}{100}\right)^{-\frac{1}{2}}$; 12) $16^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{-2}$;

13) $27^{\frac{1}{3}}\cdot 8^{\frac{2}{3}}\cdot 3^{-2}$; 14) $16^{0,25}\cdot 0{,}125^{-3}$; 15) $5^{-\frac{3}{4}}:5^{-0,25}$; 16) $\left(2^{-\frac{1}{2}}-2^{\frac{1}{2}}\right)^2$.

164. Зобразити у вигляді степеня:

1) $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}$; 2) $y^{-0,2}:y^{0,4}$; 3) $\left(x^{-1\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{4}}$; 4) $\left(\sqrt[5]{a^3}\right)^{15}$;

5) $\left(b^{-\frac{3}{4}}\right)^{\frac{5}{9}}\cdot b^{\frac{7}{12}}$; 6) $a^{\frac{5}{6}}:\left(a^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{5}{8}}$; 7) $\left(x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{5}{3}}\right)^{0,4}$; 8) $\frac{\sqrt[3]{a^2}\cdot a^{0,5}}{a^{\frac{1}{6}}}$;

9) $\frac{a^{0,3}\cdot\sqrt[5]{a^2}}{a^{-1,3}}$; 10) $\left(\sqrt[11]{b^6}\right)^0\cdot\left(\sqrt[6]{b^5}\right)^{-3}\cdot b^{\frac{1}{2}}$.

165. Спростити вираз :

1) $\frac{a^{\frac{1}{2}}\left(a^{-\frac{1}{2}}-a^{\frac{3}{2}}\right)}{1-a}$; 2) $\left(x^{\frac{3}{2}}-1\right)\left(x^{\frac{3}{2}}+1\right)+1$; 3) $\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}$;

4) $\frac{a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; 5) $\frac{4a-b}{2a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}$; 6) $\frac{a-b}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}$;

7) $a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{2}{3}}\left(a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{3}}\right)$; 8) $\left(c^{-\frac{3}{7}}y^{-0,4}\right)^3\cdot c^{\frac{2}{7}}\cdot y^{0,2}$; 9) $\frac{15^{\frac{1}{4}}+5^{\frac{1}{4}}}{10^{\frac{1}{4}}+5^{\frac{1}{4}}}$;

10) $\left(\frac{a^{0,5}-b^{0,5}}{a^{0,5}+b^{0,5}}+\frac{2a^{0,5}b^{0,5}}{a-b}\right)\cdot\frac{a-2a^{0,5}b^{0,5}+b}{a+b}$; 11) $\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a-b}-\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}\right)\cdot\frac{a+2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b}{4b^{\frac{1}{2}}}$;

12) $\frac{a+b}{a+2a^{0,5}b^{0,5}+b}:\left(\frac{a^{0,5}+b^{0,5}}{a^{0,5}-b^{0,5}}-\frac{2a^{0,5}b^{0,5}}{a-b}\right)$.

166. Обчислити:

1) $\sqrt[4]{250}\cdot 5^{\frac{1}{4}}:2^{-\frac{3}{4}}$; 2) $\frac{12^{\frac{1}{3}}\cdot 6^{\frac{1}{3}}}{9^{\frac{1}{3}}}$; 3) $3\cdot 9^{0,4}\cdot\sqrt[5]{3}$;

4) $8^{-\frac{1}{3}}\cdot 16^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[3]{4}$; 5) $\left(\sqrt[3]{24}\cdot\sqrt[3]{2\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$; 6) $\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\left(64^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$;

7) $\sqrt[4]{9}\cdot 3^{-1,5}$; 8) $3^{\frac{4}{3}}\cdot 9^{2}\cdot 27^{-\frac{5}{6}}\cdot 3^{-\frac{3}{2}}$; 9) $16^{\frac{3}{4}}+(0,5)^{-3}$;

10) $\left(27^{\frac{2}{3}}+125^{\frac{1}{3}}+8^{\frac{1}{3}}\right)^{-0,25}$; 11) $81^{0,25}\cdot 8^{-\frac{1}{3}}-32^{-\frac{1}{5}}\cdot 27^{\frac{2}{3}}$;

12) $\left(\frac{1}{625}\right)^{-\frac{1}{2}}+81^{-0,75}-\left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{3}{5}}$.

167. Розкласти вираз на множники :

1) $a^{\frac{2}{3}}-6a^{\frac{1}{3}}+9$; 2) $3-3^{\frac{1}{2}}$; 3) $x^{\frac{2}{3}}-x$;

4) $a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{1}{2}}$; 5) $b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{9}}$; 6) $x^{\frac{1}{8}}y^{\frac{1}{8}}+x^{\frac{1}{8}}z^{\frac{1}{8}}$;

7) $(5x)^{\frac{1}{3}}-(2x)^{\frac{2}{3}}$; 8) $x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{4}}$; 9*) $a-b+a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}$.

168. Обчислити: $0{,}027^{-\frac{1}{3}}-\left(-\frac{1}{6}\right)^{-2}+256^{0,75}-3^{-1}+5{,}5^{0}$.

169. Знайти значення виразу:

1) $\frac{a^{\frac{1}{2}}-9a^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{3}}-3a^{\frac{1}{6}}}$, якщо a=64; 2) $\frac{8}{y^{\frac{1}{4}}-2}+\frac{y-8y^{\frac{1}{4}}}{y^{\frac{1}{2}}-4}$, якщо y=25.

170. Довести, що при будь-якому $a>0$ правильна рівність:

1) $\frac{\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}}{\sqrt[4]{a^3\sqrt[3]{a}}}=1$; 2) $\frac{\sqrt[4]{a^3\sqrt[3]{a}}}{\sqrt[6]{a^5\sqrt{a}}}=1$.

171. Представити вираз у вигляді алгебраїчної суми:

1) $a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)$; 2) $b^{\frac{1}{3}}\left(b^{\frac{2}{3}}-1\right)$; 3) $x^{\frac{1}{5}}\left(y+x^{\frac{1}{5}}\right)$;

4) $x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}\left(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}\right)$; 5) $\left(17^{\frac{1}{2}}-a\right)\left(17^{\frac{1}{2}}+a\right)$; 6) $\left(b-x^{\frac{1}{2}}\right)\left(b+x^{\frac{1}{2}}\right)$;

7) $\left(a^{\frac{1}{2}}-y^{-1}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+y^{-1}\right)$; 8) $\left(a^{\frac{1}{2}}-2\right)^2$; 9*) $\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)$.

Життєва математика

172. Деяка модель смартфона коштувала 3500 грн. Згодом ціну знизили до 2800 грн. На скільки відсотків подешевшала ця модель смартфона?

Степенева функція, її властивості і графік

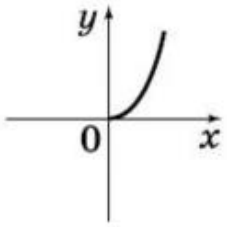
173. (Усно).Укажіть, які з даних функцій є степеневими:

1) $y = x^2$; 2) $y = 2x - x^2$; 3) $y = x^{-\frac{1}{3}}$;

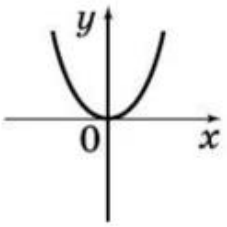
4) $y = x^{\frac{3}{4}}$; 5) $y = \sqrt[3]{x}$; 6) $y=5$.

174. Визначте, на якому з малюнків 6.12-6.17 схематично зображено графік функції $y = x^3$, $y = x^{\frac{4}{3}}$, $y = x^{-4}$?

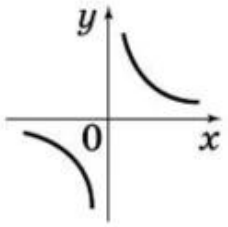
175. На якому з малюнків 6.12-6.17 схематично зображено графік функції $y = x^2$; $y = x^{-5}$; $y = x^{-\frac{1}{3}}$?



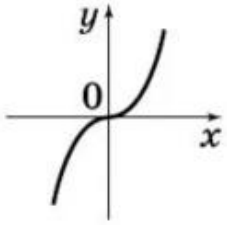
Мал. 6.12



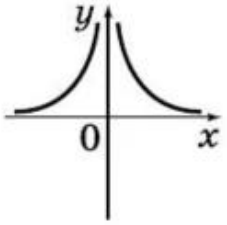
Мал. 6.13



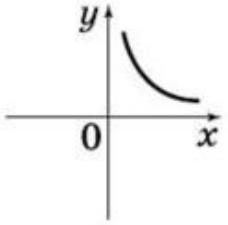
Мал. 6.14



Мал. 6.15



Мал. 6.16



Мал. 6.17

176. Які з наведених функцій невизначені при $x=0$ і є парними:

1) $y = x^{-3}$; 2) $y = x^2$; 3) $y = x^{-2}$; 4) $y = \sqrt{x}$; 5) $y = |x|$.

177. Які з наведених функцій зростають на проміжку $(0;+\infty)$.

1) $y = x^{-5}$; 2) $y = x^{-4}$; 3) $y = x^3$; 4) $y = x^2$; 5) $y = -\frac{1}{x}$?

178. Яке з чисел більше:

1) $(-15)^{-4}$ чи $(-12)^{-4}$; 2) $\left(\frac{5}{6}\right)^{-3}$ чи $\left(\frac{6}{5}\right)^{-3}$; 3) $\left(\frac{5}{6}\right)^{3}$ чи $\left(\frac{6}{5}\right)^{3}$;

4) $\left(\frac{14}{13}\right)^{-\frac{1}{3}}$ чи $\left(\frac{13}{14}\right)^{-\frac{1}{3}}$; 5) $\left(\frac{3}{4}\right)^{1.7}$ чи $0{,}755^{1,7}$; 6) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2,5}$ чи $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2,5}$;

7) $\left(\frac{7}{8}\right)^{2,5}$ чи $\left(\frac{7}{9}\right)^{2,5}$; 8) $\left(\frac{2}{5}\right)^{2,5}$ чи $\left(\frac{3}{5}\right)^{2,5}$; 9) $(0{,}292)^{-0,5}$ чи $(0{,}293)^{-0,5}$?

179. Чи перетинає графік функції $y = x^{\frac{3}{4}}$ пряма:

1) *y=0;* 2) *y=1;* 3) *y=-1;* 4) *x=0;* 5) *x=1;* 6) *x=-1.*

180. Чи перетинає графік функції $y = x^{-\frac{3}{4}}$ пряма:

1) *y=0;* 2) *y=1;* 3) *y=-1;* 4) *x=0;* 5) *x=1;* 6) *x=-1.*

181. Чи є функція $y = x^p$ зростаючою, або ж спадною, якщо:

1) p=1,6; 2) p=0,9; 3) p= -0,7.

182. Чи проходить графік функції $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ через точку з координатами:

1) (8;4); 2) (4;8); 3) $(2\sqrt{2};2)$; 4) $\left(2;2\sqrt{2}\right)$?

183. Знайти точки перетину графіка функції *y=f(x)* з осями координат, якщо:

1) $y = (x+2)^{-1}$; 2) $y = x^{-5} - 1$; 3) $f(x) = (x-1)^{\frac{4}{3}}$;

4) $f(x) = (x+2)^{\frac{4}{3}}$; 5) $f(x) = (x+1)^{-\frac{4}{3}}$; 6) $f(x) = (x-2)^{-\frac{4}{3}}$.

184. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^{\frac{1}{3}} = 2$; 2) $x^{0,25} = 0$; 3) $x^{\frac{1}{6}} = 1$; 4) $x^{\frac{1}{2}} = 3$.

185. Знайти область визначення функції:

1) $y = (x-3)^5$; 2) $y = (x-3)^{-5}$; 3) $y = (x+3)^{\frac{1}{5}}$;

4) $y = (x+3)^{-\frac{1}{5}}$; 5) $y = (3-x)^{-\frac{1}{4}}$; 6) $y = (5-x)^{\frac{7}{5}}$;

7) $y = (x+3)^{\frac{7}{3}}$; 8) $y = (x-2)^{-\frac{1}{5}}$; 9) $y = (x-1)^{\frac{1}{5}}$.

186. Знайти множину значень функції:

1) $y = x^{\frac{1}{5}} - 1$; 2) $y = x^{-\frac{2}{3}} + 3$.

187. Побудувати схематично графік функції та вкажіть її властивості:

1) $y = (x+1)^{-2}$; 2) $y = x^{-3} + 1$; 3) $y = 2x^{-1} + 2$;

4) $y = x^{-4} - 2$; 5) $y = x^{\frac{3}{2}}$; 6) $y = x^{-\frac{3}{2}}$;

7) $y = x^{-12} - 1$; 8) $y = (x+3)^{\frac{13}{3}}$; 9) $y = x^{-\frac{3}{4}} - 2$;

10) $y = (x-2)^{\frac{2}{3}}$; 11) $y = x^{-\frac{7}{5}} + 1$; 12) $(x-4)^{-20} + 3$.

188. Розмістити за зростанням числа:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^{0,6}, \left(\frac{1}{5}\right)^{0,6}, \left(\frac{2}{5}\right)^{0,6}$; 2) $\left(\frac{3}{7}\right)^{-\frac{1}{7}}, \left(\frac{7}{3}\right)^{-\frac{1}{7}}, 1$.

189. Скільки коренів має рівняння:

1) $x^2+1=x^{-0,2}$; 2) $x^3=(x+1)^{\frac{1}{2}}$; 3*) $x^{\frac{1}{6}}\cdot x^{-\frac{5}{6}}=2x+3$.

190. Дано функцію $y=\sqrt[3]{x}$.

1) Вказати її область визначення.

2) Дослідити її на парність і непарність.

3) Побудувати її графік, використовуючи графік функції $y=x^{\frac{1}{3}}$.

191. Знайти степеневу функцію $y=ax^{\frac{1}{5}}$, якщо її графік проходить через точку $A(32;1)$. На одному рисунку зобразити графік знайденої функції і графік функції $y=x^{\frac{1}{5}}$.

Життєва математика

192. Шоколадка коштує 16 грн. У вихідні у супермаркеті діє спеціальна пропозиція: заплативши за три шоколадки, покупець отримує чотири (одну в подарунок). Яку максимальну кількість шоколадок матиме покупець, що розрахувався за них на касі, якщо він планував витратити на купівлю шоколадок не більше ніж 100 грн?



Ірраціональні рівняння

193. Які з рівнянь алгебраїчні, які ірраціональні:

1) $y+\sqrt{y}=11$; 2) $y+\sqrt{2}=5$; 3) $y^2+\sqrt{13}y=4$;

4) $x^3+x^2+x=\sqrt{x}$; 5) $\sqrt{x-12}=5$; 6) $x+\frac{\sqrt{15}}{x}=7$?

194. Чи є число a коренем рівняння:

1) $\sqrt{x-1}=\sqrt{1-x}, a=1$; 2) $\sqrt{x-5}=\sqrt{2x-9}, a=4$;

3) $\sqrt[3]{2-x}=\sqrt[3]{x-2}, a=0$; 4) $\sqrt{x-1}=\sqrt[3]{x+3}, a=5$?

195. Розв'язати рівняння:

1) $\sqrt{x}=2$; 2) $\sqrt{x-3}=5$; 3) $\sqrt{x}-4=0$;

4) $\sqrt{2x-7}=5$; 5) $\sqrt{2-x}=\sqrt{3-2x}$; 6) $\sqrt[3]{x+2}=-1$;

7) $x+1=\sqrt{1-x}$; 8) $\sqrt{8-x}+x=2$; 9) $\sqrt{x-2}=x-8$;

10) $\sqrt{x-6}=\sqrt{4-x}$; 11) $x+\sqrt{x+5}=7$; 12) $3\sqrt{x+2}=2x-5$;

13) $\sqrt{x-3}=7$; 14) $\sqrt{x^2+1}=\sqrt{5}$; 15) $3+\sqrt{x}=0$;

16) $\sqrt{2x+1}=\sqrt{x+2}$; 17) $x^2-3=\sqrt[3]{x^2-3}$; 18) $4+\sqrt{2x+3}=x-2$;

19) $\sqrt{x-7}+\sqrt{17-x}=4$; 20) $\sqrt{9-x}+\frac{4}{\sqrt{9-x}}=5$; 21) $3\sqrt{x^2-4}+1=3x+7$;

22) $\sqrt{4x+8}+\sqrt{3x-2}=2$; 23) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{4x+3}=1$; 24) $\sqrt[3]{8x+4}-\sqrt[3]{8x-4}=2$;

$25^{*})\ \frac{1}{\sqrt{x-3}}-\sqrt{x-3}=\sqrt{x-6}$; $26^{*})\ \sqrt{8x-5}-\sqrt{2x+3}=\sqrt{6x+1}$;

$27^{*})\ \sqrt{x^2}=x$; $28^{*})\ \sqrt[4]{x^4}=-x$; $29^{*})\ (x-2)\sqrt{1-x}=0$;

196*. Розв'язати рівняння:

1) $\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+2}=\sqrt{x^2-4}$; 2) $\sqrt{x(x+1)}=\sqrt{-x}\cdot\sqrt{-(x+1)}$.

197. Не розв'язуючи рівняння, пояснити, чому кожне з них не має коренів:

1) $\sqrt{x-3}+\sqrt{x+3}+1=0$; 2) $\sqrt{2x^2-3x+5}=-4$;

3) $\sqrt{x-2}+\sqrt{1-x}=5$; 4) $\sqrt{x-3}+\sqrt{3-x}=1$.

198. Розв'язати систему рівнянь:

1) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=5,\\ \sqrt{xy}=6;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=3,\\ xy=4;\end{cases}$

3) $\begin{cases}\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{5}{2},\\ x+y=10;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt{y}=3,\\ \sqrt[3]{x}-\sqrt{y}=1;\end{cases}$

5) $\begin{cases}\sqrt{x+y}=4,\\ \sqrt[3]{x-y}=2;\end{cases}$ 6) $\begin{cases}\sqrt{x}=\sqrt{y},\\ x^2+y=2.\end{cases}$

Життєва математика

199. Клієнт «Добробанку» взяв кредит у розмірі 24 000 грн на рік під 16%. Погашати банку кредит він має, вносячи щомісяця однакову суму коштів так, щоб через рік виплатити всю суму кредиту разом з відсотками. Скільки коштів має щомісяця вносити в банк цей клієнт?

Розділ 3. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ

Синус, косинус, тангенс, котангенс кута

200. (Усно). Обчислити:

1) $\sin 30^0$; 2) $\cos 45^0$; 3) $tg60^0$; 4) $ctg90^0$;
5) $\cos 60^0$; 6) $\sin 45^0$; 7) $tg30^0$; 8) $ctg60^0$;
9) $ctg45^0$; 10) $\cos 180^0$; 11) $\sin 270^0$; 12) $ctg30^0$;
13) $\sin 0^0$; 14) $\cos 90^0$; 15) $tg360^0$; 16) $ctg45^0$;
17) $\cos 0^0$; 18) $ctg270^0$; 19) $tg0^0$; 20) $\sin 60^0$;
21) $\cos 30^0$; 22) $\sin 180^0$; 23) $tg180^0$; 24) $\sin 90^0$.

201. Записати кут β у вигляді $\beta = \alpha + 360^0 n$, де $n \in Z, \alpha$ - додатний кут, менший від 360^0, якщо:

1) $\beta = -180^0$; 2) $\beta = -780^0$; 3) $\beta = 1580^0$; 4) $\beta = 7242^0$; 5) $\beta = -1690^0$.

202. Зобразити у колі у системі координат кут $\beta = \alpha + 360^0 n$ при таких значеннях n і α:

1) $n = 3, \alpha = 40^0$; 2) $n = -2, \alpha = 30^0$; 3) $n = 5, \alpha = -25^0$; 4) $n = -3, \alpha = 48^0$.

203. Куту β на одиничному колі відповідає точка $P_\beta(0{,}8;\ 0{,}6)$. Запишіть значення $\sin\beta$ і $\cos\beta$.

204. Обчислити значення виразів:

1) $3tg0^0 + 2\cos 90^0 + 3\sin 270^0 - 3\cos 180^0$;
2) $5\sin 90^0 + 4\cos 0^0 - 3\sin 270^0 + 8\cos 180^0$;
3) $\sin 270^0 - ctg90^0 + \sin 180^0 - \cos 90^0 + tg180^0$;
4) $a^2 \cos 0^0 + 2abctg45^0 + b^2 \sin 90^0$.

205. Знайти значення виразу $\sin(\alpha + \beta)$, якщо $\alpha = 15^0; \beta = 45^0$.

206. Знайти значення виразу $\cos(\beta - \alpha)$ якщо $\alpha = 121^0; \beta = 61^0$.

207. Обчислити значення виразів:

1) $\sin\alpha + \cos\alpha$, якщо $\alpha = 45^0$;
2) $tg\alpha - \sin\alpha$, якщо $\alpha = 0^0$;
3) $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha$, якщо $\alpha = 30^0$;
4) $\frac{tg\alpha + ctg\alpha}{2}$, якщо $\alpha = 45^0$.

208. Чи може косинус деякого кута дорівнювати:

1) 0,29; 2) $\frac{4}{3}$; 3) -0,89; 4) $\frac{1{,}41}{\sqrt{2}}$; 5) $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{3}}$; 6) $\frac{\pi}{3}$?

209. Обчисліть:

1) $\sin^2 45^0 + \cos^2 60^0$; 2) $sin\ 30^0 \cos 180^0\ tg45^0$;
3) $\mathrm{tg}^2 180^0 + \cos^2 120^0$; 4) $(2ctg270^0 - 2cos60^0 + sin^2 60^0)^{-1}$.

Життєва математика

210. Для табору пластунів треба придбати цукор з розрахунку 50 г цукру на добу (на одну особу). У таборі чотири курені на 28 місць кожен. Скільки кілограмових упаковок цукру знадобиться на 5 діб для всього табору?

Радіанне вимірювання кутів

211. Записати у радіанній мірі кути: $15^0, 22^0 30', 51^0, 157^0 30', 162^0$.

212. Виразити кут α в радіанах, якщо:

1) $\alpha = 54^0$; 2) $\alpha = 200^0$; 3) $\alpha = 225^0$; 4) $\alpha = 390^0$; 5) $\alpha = -45^0$; 6) -60^0.

213. Записати у градусній мірі кути, виміряні у радіанах: $\frac{2\pi}{5}; \frac{6\pi}{5}; \frac{10\pi}{5}$; 1,5; 2,50.

214. Знайти градусну міру кута, радіанна міра якого дорівнює:

1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{3}{2}\pi$; 3) $\frac{2\pi}{3}$; 4) $\frac{4}{5}\pi$; 5) $-\frac{5\pi}{6}$; 6) 12π;

7) 10; 8) 1) $\frac{\pi}{3}$; 9) 2; 10) $\frac{3\pi}{4}$; 11) $\frac{\pi}{4}$; 12) $\frac{2\pi}{3}$;

13) $\frac{\pi}{12}$; 14) 7π; 15) $\frac{5\pi}{2}$; 16) 0,5; 17) $0{,}75\pi$; 18) 1,882.

215. У якій чверті закінчується кут:

1) $\frac{\pi}{6}$; 2) 3; 3) 128^0; 4) 216^0; 5) 7π; 6) 0,80; 7) $\frac{21\pi}{4}$; 8) 100.

216. Визначити координатну чверть, у якій розташована точка, отримана поворотом точки $P(1;0)$ на кут:

1) $\frac{5\pi}{4}$; 2) $-\frac{14\pi}{3}$; 3) 380^0; 4) -380^0; 5) 4,5.

217. Обчисліть:

1) $4\sin\frac{\pi}{6} + ctg\frac{\pi}{4}$; 2) $\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{3\pi}{2}$;

3) $2\cos\pi - \sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3}$; 4) $2\cos\frac{2\pi}{3} + tg\frac{3\pi}{4}$.

218. Знайдіть значення виразу $3\sin\alpha + 2\cos\alpha$, якщо:

1) $\alpha = 0$; 2) $\alpha = \pi$; 3) $\alpha = \frac{\pi}{2}$; 4) $\alpha = \frac{3\pi}{2}$.

219. Виразити у радіанах кут, суміжний з кутом α, якщо:

1) $\alpha = \frac{5\pi}{6}$; 2) $\alpha = \frac{11}{12}\pi$; 3) $\alpha = 0{,}3\pi$.

220. Кути трикутника пропорційні числам 2,3,5. Знайдіть кути трикутника в радіанах. Визначити вид цього трикутника.

221. У рівнобедреному трикутнику кут при вершині дорівнює 45^0. Виразити у радіанах кути цього трикутника.

222. Один із гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює $\frac{\pi}{6}$. Знайти інший гострий кут.

223. Знайти радіанну міру внутрішніх кутів правильного:

1) трикутника; 2) чотирикутника;
3) шестикутника; 4) десятикутника;
5) дванадцятикутника; 6) двадцятикутника.

224. Знайти координати точки одиничного кола, отриманої поворотом точки $P(1;0)$ на кут:

1) $\pi;-\frac{3\pi}{2};-\frac{\pi}{2};5\pi;4\pi;$ 2) $360^0;270^0;-180^0;720^0-450^0.$

225. Накреслити коло з центром у початку координат і зобразити кут повороту, який дорівнює:

1) $30^0;$ 2) $-\frac{\pi}{3};$ 3) $-210^0;$ 4) $\frac{5\pi}{6}.$

Життєва математика

226. Перші п'ять цифр ідентифікаційного податкового номера (ІПН) громадянина України – це число, що точно дорівнює кількості днів від 1 січня 1900 року до дати народження власника ІПН включно.

1) Знайдіть, якими мають бути перші п'ять цифр вашого ІПН.

2) Знайдіть число, місяць та рік народження особи, ІПН якої дорівнює числу 2395312785.

Тригонометричні функції числового аргументу

227. Побудувати на одиничному колі точки P_α, на які відображується початкова точка $P_0(1;0)$ під час повороту навколо центра кола на α рад, якщо:

1) $\alpha=\frac{\pi}{12};$ 2) $\alpha=2{,}5;$ 3) $\alpha=2;$ 4) $\alpha=\frac{5}{6}\pi.$

228. Вказати декілька кутів α, при яких не має змісту вираз:

1) $tg\alpha;$ 2) $ctg\alpha.$

229. Знайти значення синуса, косинуса, тангенса і котангенса кута α, якщо $\alpha=\frac{5\pi}{6}.$

230. Чи може набувати значення $\frac{\sqrt{10}}{3}$:

1) $\sin\alpha;$ 2) $\cos\alpha;$ 3) $tg\alpha;$ 4) $ctg\alpha.$

231. Визначити знаки $\sin\alpha,\cos\alpha,tg\alpha,ctg\alpha,$ якщо:

1) $\alpha=0{,}3;$ 2) $\alpha=\frac{12}{7}\pi;$ 3) $\alpha=2;$ 4) $\alpha=-\frac{13\pi}{6}.$

232. Вказати три значення *x*, при яких:

1) $\sin x=0;$ 2) $\sin x=-1;$ 3) $\sin x=1;$

4) $\cos x=0;$ 5) $\cos x=-1;$ 6) $\cos x=1.$

233. Який знак має:

1) $\sin\alpha$, якщо $\alpha=13^0,103^0,218^0,302^0;$

2) $\cos\alpha$, якщо $\alpha=41^0,179^0,273^0,354^0;$

3) $tg\alpha$, якщо $\alpha=14^0,86^0,191^0,311^0;$

4) $ctg\alpha$, якщо $\alpha=67^0,98^0,195^0,279^0.$

234. Порівняти вираз з нулем:

1) $\sin 65^0;$ 2) $tg147^0\sin 269^0;$ 3) $\sin\frac{4\pi}{5}\cos\frac{9\pi}{7}tg\frac{2\pi}{9};$

4) $\sin(-2)\cdot\cos 2\cdot tg(-3)$; 5) $\sin\frac{3\pi}{5}\,tg\,\frac{7\pi}{9}\cos t$.

235. Нехай $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Визначити знак виразу:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; 2) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; 3) $\sin(2\alpha-\pi)$;

4) $tg(\alpha-\pi)$; 5) $\cos(\pi-\alpha)$; 6) $ctg\left(2\pi-\frac{\alpha}{2}\right)$.

236. Чи можлива рівність:

1) $\sin x=\frac{1}{5}$; 2) $\sin x=-\frac{\sqrt{15}}{3}$; 3) $\cos x=1{,}2$;

4) $tgx=3$; 5) $\frac{1}{\sin x}=0{,}9$; 6) $\frac{1}{\cos x}=-1{,}5$.

237. Що більше:

1) $\sin 1$ чи $\sin 1{,}5$; 2) $\cos 2$ чи $\cos 2{,}1$;

3) $tg\,\frac{\pi}{6}$ чи $tg\,\frac{\pi}{4}$; 4) $ctg\,\frac{\pi}{3}$ чи $ctg\,\frac{\pi}{3{,}2}$?

238. Обчислити:

1) $3\cos\pi-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}+ctg\,\frac{3\pi}{2}$; 2) $2\sin\frac{\pi}{3}-\sqrt{2}tg\,\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}$;

3) $2\sin\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{4}+tg\,\frac{\pi}{6}$; 4) $tg\,\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{6}$;

5) $\cos 0+\sin\frac{\pi}{2}+\sin 0+2\cos\frac{\pi}{3}$; 6) $6tg\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cdot ctg\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)-5\cos(-\pi)$;

7) $tg\,\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{3}\cdot ctg\,\frac{\pi}{6}$; 8) $\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{2}$.

239. Знайти найбільше і найменше значення виразу:

1) $2\cos x$; 2) $2\sin x-3$; 3) $3-\cos^2 x$;

4) $-5\sin x$; 5) $5\cos t+1$; 6) $\frac{1}{2+\cos x}$;

7) $3+2\sin x$; 8) $2+3\sin^2 x$; 9) $-7\sin\alpha$;

10) $3\cos\alpha-3$; 11) $\frac{1}{2+\sin\alpha}$; 12) $\frac{1}{3-\sin x}$.

240. Знайти значення виразу $\sin(\alpha-\beta)$, якщо $\alpha=\frac{\pi}{3}$; $\beta=\frac{\pi}{6}$.

241. Знайти значення виразу $\cos(\alpha+\beta)$, якщо $\alpha=\frac{\pi}{4}$; $\beta=\frac{3\pi}{4}$.

242. Знайти значення виразу:

1) $\sin\alpha-\cos\alpha$, якщо $\alpha=0;\frac{\pi}{2};\pi;2\pi$;

2) $2\sin\alpha+\cos 2\alpha$, якщо $\alpha=0;\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2};\pi$;

3) $3\sin\alpha-\cos 3\alpha$, якщо $\alpha=0;\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}$; 4) $\sin 3\alpha+\cos\alpha$, якщо $\alpha=0;\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3};\pi$.

243. Знайти значення виразу:

1) $\dfrac{\sin 2\alpha - \cos\alpha \cdot tg\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha + ctg\alpha}$, якщо $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$;

2) $\dfrac{3\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)-3\cos\alpha}$, якщо $\alpha = \dfrac{\pi}{3}; \beta = \dfrac{\pi}{6}$.

244. Чи правильна нерівність:

1) $\sin\dfrac{\pi}{4} + \cos\dfrac{\pi}{4} > 1$; 2) $2\sin\dfrac{\pi}{3} + \cos\dfrac{\pi}{2} > 2$?

Життєва математика

245. Пачка офісного паперу формату А4 налічує 500 аркушів. Офіс у середньому витрачає 1700 таких аркушів на тиждень. Яку найменшу кількість пачок паперу треба придбати для офісу на 4 тижні?

Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу

246. Спростити вирази:

1) $1-\sin^2\alpha$; 2) $\cos^2\alpha - 1$; 3) $1+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$;

4) $1-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$; 5) $\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha - 1$; 6) $(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)$;

7) $\dfrac{1}{\sin^2\alpha} - 1$; 8) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot tg\alpha$; 9) $\dfrac{1+ctg\alpha}{1+tg\alpha}$;

10) $\dfrac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha} + tg\alpha\cdot ctg\alpha$; 11) $\cos\alpha\cdot tg\alpha + \sin\alpha$; 12) $\dfrac{tg\alpha+tg\beta}{ctg\alpha+ctg\beta}$;

13) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+ctg^2\alpha$; 14) $1+tg^2\alpha+tg^2\alpha(\cos^2\alpha-1)$;

15) $\dfrac{(1-\cos 2\alpha)\cos\alpha}{\sin\alpha}$; 16) $(tg\alpha+ctg\alpha)\sin 2\alpha$; 17) $\dfrac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}$;

18) $\sin^2\alpha\cdot ctg^2\alpha + \cos^2\alpha\cdot tg^2\alpha$; 19) $\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+1$.

247. Дано: $tg\alpha + ctg\alpha = m$. Знайти:

1) $tg^2\alpha + ctg^2\alpha$; 2) $tg^3\alpha + ctg^3\alpha$.

248. Дано: $\sin\alpha+\cos\alpha = 0{,}1$. Знайти $2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

249. Дано: $tg\alpha + ctg\alpha = 10$. Знайти $tg^2\alpha + ctg^2\alpha$.

250. Дано: $x = \dfrac{1}{3}tg\alpha; y = 9ctg\alpha$. Знайти $x\cdot y$.

251. Обчислити значення решти тригонометричних функцій за даним значенням однієї з них:

1) $\cos\alpha = -\dfrac{7}{25}, \dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; 2) $tgx = 2; \pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$;

3) $\sin x = -\dfrac{12}{13}, \dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi$; 4) $ctgx = \dfrac{7}{24}, 180^0 < x < 270^0$.

252. Відомо, що $\sin t = 0{,}8$ і $\dfrac{\pi}{2} < t < \pi$. Знайти $\cos t, tgt, ctgt$ за основним тригонометричним співвідношенням.

253. Дано: $ctg\alpha = 1{,}0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Знайти: $\sin\alpha, \cos\alpha, \operatorname{tg}\alpha$.

254. Дано: $\cos\alpha = -0{,}8, 0 \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Знайти: $\sin\alpha, \operatorname{tg}\alpha, \operatorname{ctg}\alpha$.

255. Дано: $\sin\alpha = 0{,}6,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Знайти: $\cos\alpha, \operatorname{tg}\alpha, \operatorname{ctg}\alpha$.

256. Обчислити значення кожної з тригонометричних функцій, якщо:

1) $\sin t = -0{,}8;\ \frac{3\pi}{2} < t < 2\pi;$ 3) $tg - 2{,}4;\ \frac{\pi}{2} < t < \pi;$

4) $ctgt = 3; 0 < t < \frac{\pi}{2};$ 5) $\cos t = -\frac{5}{13};\ \pi < t < 2\pi.$

257. Знайти координати точки P_t на тригонометричному колі, якщо:

1) $ctgt = -\frac{5}{12};$ 2) $tgt = 1 + \sqrt{2}.$

258. Довести тотожність:

1) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha;$ 2) $(1 - tg\alpha)^2 + (1 + tg\alpha)^2 = \frac{2}{\cos^2\alpha};$

3) $\left(ctg^2\alpha - \cos^2\alpha\right)tg^2\alpha = \cos^2\alpha;$ 4) $tg^2\alpha - \sin^2\alpha = \sin^2\alpha \cdot tg^2\alpha;$

5) $\frac{1 + tg^2\alpha}{tg^2\alpha} \cdot \frac{ctg^2\alpha}{1 + ctg^2\alpha} = \frac{1 + ctg^4\alpha}{tg^2\alpha + ctg^2\alpha};$ 6) $\frac{\cos^3\alpha - \sin^3\alpha}{1 + \sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \cos\alpha - \sin\alpha.$

Життєва математика

259. Освітлення кімнати споживає 300 Вт щогодини. Щодня його вмикають на 6 годин. Якщо провести заміну освітлення на енергозберігаюче, то витрати зменшаться на 30%. 1) Скільки кВт·год протягом тижня можна заощадити на освітленні кімнати, використовуючи енергозберігаюче освітлення?
2) Скільки коштів можна заощадити протягом тижня за діючими тарифами на електроенергію, перейшовши на енергозберігаюче освітлення?

Формули зведення

260. Обчислити значення тригонометричних функцій для наступних кутів:

1) 120^0; 2) 135^0; 3) 150^0; 4) 210^0; 5) 225^0;
6) 240^0; 7) 300^0; 8) 315^0; 9) 330^0; 10) 390^0.

261. Користуючись формулами зведення, обчислити:

1) $\sin\frac{19\pi}{6};$ 2) $\cos\frac{11\pi}{3};$ 3) $tg\frac{11\pi}{4};$ 4) $ctg\frac{31\pi}{6};$

5) $\sin\left(-\frac{7\pi}{3}\right);$ 6) $\cos\left(-\frac{13\pi}{6}\right);$ 7) $tg\left(-\frac{4\pi}{3}\right);$ 8) $ctg\left(-\frac{7\pi}{4}\right).$

262. Обчислити значення виразу:

1) $\cos 990^0 - \sin 780^0 - ctg 945^0;$
2) $tg 1080^0 - \sin 855^0 + \cos 1305^0;$
3) $3\cos 1860^0 + \sin\left(-1920^0\right) + \cos\left(-630^0\right).$
4) $\cos 2850^0 - \cos\left(-765^0\right) + tg 1035^0;$
5) $\left(\sin 10^0 + \sin 20^0 + \sin 30^0\right) - \left(\cos 60^0 + \cos 70^0 + \cos 80^0\right).$

263. Обчислити суму:

1) $\sin 0^0 + \sin 1^0 + \sin 2^0 + ... + \sin 359^0 + \sin 360^0$;

2) $tg20^0 + tg40^0 + tg60^0 + ... + tg160^0 + tg180^0$.

264. Знайти $\sin\alpha, \cos\alpha, tg\alpha, ctg\alpha$. Якщо:

1) $\alpha = 2\pi$; 2) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$; 3) $\alpha = \frac{5\pi}{6}$.

265. Обчислити, використовуючи формули зведення:

1) $\sin 240^0$; 2) $tg210^0$; 3) $ctg300^0$; 4) $\sin 330^0$;

5) $ctg(-225^0)$; 6) $\sin 315^0$; 7) $\cos(-225^0)$; 8) $\sin(-150^0)$;

9) $\cos\frac{7}{6}\pi$; 10) $\sin\frac{4\pi}{3}$; 11) $ctg\frac{2\pi}{3}$; 12) $tg\frac{5}{4}\pi$.

266. Звести до тригонометричної функції кута α:

1) $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$; 2) $\sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$; 3) $\cos(\alpha - \pi)$;

4) $tg(-\alpha + 270^0)$; 5) $tg(\alpha - 2\pi)$; 6) $ctg(\alpha - 360^0)$;

7) $ctg\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$; 8) $tg(90^0 - \alpha)$; 9) $\cos(90^0 + \alpha)$.

267. Спростити вираз:

1) $tg\alpha tg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; 2) $\frac{\sin(\pi - \alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}$; 3) $tg\alpha \cdot ctg(\pi - \alpha)$;

4) $tg17^0 \cdot tg73^0$; 5) $1_\sin(\pi - \alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$; 6) $\frac{\cos 70^0}{\sin 20^0}$;

7) $\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \sin^2(\pi + \alpha)$; 8) $\sin(180^0 - \alpha) + \cos(90^0 + \alpha)$;

9) $\frac{\sin(\pi - \alpha) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + ctg(\pi - \alpha)}{tg\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}$; 10) $\frac{ctg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - tg(\pi + \alpha) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos(\pi + \alpha)}$.

268. Спростити вираз і знайти його числове значення

$\frac{\sin\left(\frac{19\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(7\pi + \alpha)}{\cos\left(\frac{11\pi}{2} + \alpha\right) + \sin(\alpha - \pi)}$ при $\alpha = \frac{5\pi}{6}$.

269. Знайти числове значення виразу:

1) $\cos(-225^0) + \sin 135^0 - tg225^0$; 2) $tg\frac{7\pi}{4} + \sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) - 2\cos\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$;

3) $\cos^2(\pi - \alpha) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) - tg\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot tg(2\pi - \alpha)$.

270. Дано: $\cos\alpha = 0{,}6,\ 0^0 < \alpha < 90^0$. Знайти:

1) $\cos(270^0 - \alpha)$; 2) $\sin(90^0 + \alpha)$; 3) $\cos(90^0 - \alpha)$; 4) $\sin(180^0 + \alpha)$.

271. Дано: $tg\alpha = 3$. Знайти:

1) $tg(90^0-\alpha)$; 2) $ctg(180^0-\alpha)$; 3) $tg(180^0+\alpha)$; 4) $ctg(90^0+\alpha)$.

Життєва математика

272. Залежність обсягу попиту q (одиниць у місяць) від ціни p (тис. грн) на продукцію підприємства-монополіста задається формулою $q = 50 - 5p$. Виручка підприємства за місяць r (у тис. грн)обчислюється за формулою $r(p) = qp$. Визначте найбільшу ціну p, при якій виручка за місяць $r(p)$ складе не менше ніж 120 тис. грн.

Тригонометричні формули додавання

273. Скориставшись формулами додавання, довести такі формули зведення:

1) $\sin(180^0-\alpha)=\sin\alpha$; 2) $\cos(270^0+\alpha)=\sin\alpha$;

3) $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$; 4) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha$.

274. Обчислити за допомогою формул додавання:

1) $\cos15^0$; 2) $\sin135^0$; 3) $\cos165^0$; 4) $\cos75^0$;

5) $\cos225^0$; 6) $\cos105^0$; 7) $\sin15^0$; 8) $\sin75^0$;

9) $\cos165^0$; 10) $tg\frac{\pi}{12}$; 11) $\sin\frac{2\pi}{3}$.

274. Обчислити:

1) $\sin68^0\cos8^0-\sin8^0\cos68^0$; 2) $\cos10^0\cos35^0-\sin10^0\sin35^0$;

3) $\cos66^0\cos21^0+\sin66^0\sin21^0$; 4) $\cos21^0\cos24^0-\cos69^0\cos66^0$.

275. Знайти:

1) $\sin(\alpha+\beta),\sin(\alpha-\beta)$, якщо $\sin\alpha=-\frac{8}{17};\cos\beta=\frac{24}{25};\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2};0<\beta<\frac{\pi}{2}$;

2) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$, якщо $\sin\alpha=\frac{3}{5},\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$;

3) $tg\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$, якщо $tg\alpha=2$;

4) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$, якщо $\sin\alpha=-0{,}8;\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$;

5) $tg(45^0-\alpha)$, якщо $\sin\alpha=-\frac{12}{13};180^0<\alpha<270^0$.

276. Спростити вираз:

1) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$; 2) $\cos\frac{3\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}+\sin\frac{3\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}$;

3) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\alpha$; 4) $\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-\sin\alpha$;

5) $2\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)-\sqrt{3}\sin\alpha$; 6) $\sqrt{3}\cos\alpha-2\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$;

7) $\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}$; 8) $\frac{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}$.

277. Довести тотожність:

1) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cdot\cos\beta$; 2) $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\sin\beta\cdot\cos\alpha$;

3) $\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$; 4) $\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$.

278. Знайти значення виразу:

1) $\cos10^0\cos20^0-\sin10^0\sin20^0$; 2) $\sin13^0\cos17^0+\sin17^0\cos13^0$;

3) $\sin78^0\cos18^0-\sin18^0\cos78^0$; 4) $\cos66^0\cos6^0+\sin66^0\sin6^0$;

5) $\cos8^0\cos37^0-\cos82^0\cos53^0$; 6) $\cos63^0\cos18^0+\sin63^0\sin18^0$;

7) $\sin80^0\cos20^0-\cos80^0\sin20^0$; 8) $\sin64^0\sin34^0-\sin56^0\cos116^0$;

9) $\sin\frac{3\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7}$; 10) $\frac{\cos22^0\cos8^0-\sin22^0\sin8^0}{\cos15^0\sin75^0-\cos75^0\sin15^0}$;

11) $\left(\sin18^0\cdot\cos7^0+\cos18^0\cdot\sin7^o\right)^2+\left(\cos19^0\cdot\cos6^0-\sin19^0\cdot\sin6^0\right)^2$;

12) $\frac{tg17^0+tg13^0}{1-tg17^0\cdot tg13^0}$; 13) $\frac{tg73^0-tg13^0}{1+tg73^0\cdot tg13^0}$; 14) $\frac{1-tg67^0\cdot tg7^0}{tg67^0\cdot tg7^0}$;

15) $\frac{tg10^0+tg35^0}{1-tg10^0\cdot tg35^0}$; 16) $\frac{tg\frac{\pi}{18}+tg\frac{\pi}{9}}{1-tg\frac{\pi}{18}\cdot tg\frac{\pi}{9}}$.

279*. Довести тотожність $\sqrt{3}\cos\alpha-\sin\alpha=2\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$.

Життєва математика

280. Коефіцієнт корисної дії (ККД) деякого двигуна визначають за формулою $\eta=\frac{T_1-T_2}{T_1}\cdot100\%$, де T_1 – температура нагрівача (у градусах Кельвіна), T_2 –температура холодильника (у градусах Кельвіна). При якій мінімальній температурі нагрівача T_1 ККД цього двигуна становитиме не менше 20%, якщо температура холодильника $T_2=320$ К? Відповідь запишіть у градусах кельвіна.

Формули подвійного і половинного аргументів. Формули пониження степеня

281. Виразити тригонометричні функції через функції аргументу, що вдвічі менші від даного:

1) $\sin\alpha$; 2) $\cos\alpha$; 3) $tg\alpha$;

4) $\cos2\alpha$; 5) $\sin3\alpha$; 6) $tg4\alpha$;

7) $\sin\frac{\alpha}{2}$; 8) $\cos7\alpha$; 9) $tg\frac{\alpha}{10}$;

10) $\sin(\alpha+\beta)$; 11) $tg(\alpha-\beta)$; 12) $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)$;

13) $tg\left(90^0+2\alpha\right)$; 14) $\sin\left(\frac{2\pi}{9}+\beta\right)$; 15) $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$.

282. Спростити вираз:

1) $\frac{\sin2\alpha}{\sin\alpha}$; 2) $\frac{2\cos^2\alpha}{\sin2\alpha}$; 3) $\cos^2\alpha-\cos2\alpha$;

4) $\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$; 5) $\frac{\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha}$; 6) $\frac{2tg7^0}{1-tg^2 7^0}$;

7) $\frac{1-tg^2 43^0}{2tg43^0}$; 8) $2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$; 9) $2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}$;

10) $\sin 15^0\cos 15^0$; 11) $\frac{2tg15^0}{1-tg^2 15^0}$; 12*) $\cos 13^0\cos 77^0$;

13*) $\sin^2 65^0-\sin^2 25^0$; 14) $\sin 10^0\cos 10^0$; 15) $\sin\frac{\alpha}{8}\cos\frac{\alpha}{8}$;

16) $\frac{\sin 40^0}{\sin 20^0}$; 17) $\frac{\cos 80^0}{\cos 40^0+\sin 40^0}$; 18) $\frac{\cos 36^0+\sin^2 18^0}{\cos 18^0}$;

19) $2\sin 15^0\cos 15^0$; 20) $4\cos^2\frac{\pi}{8}-4\sin^2\frac{\pi}{8}$; 21) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha$;

22) $2\cos^2\alpha-1$; 23) $1-2\sin^2\alpha$; 24) $\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$;

25) $\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$; 26) $\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{1+\sin 2\alpha}$; 27) $\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$;

28) $\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha$; 29) $\cos^2\alpha-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}$; 30) $\frac{1-\cos 2\gamma}{1+\cos 2\gamma}$;

31) $\frac{tg(45^0-\alpha)}{1-tg^2(45^0-\alpha)}$; 32) $2\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$;

33) $\cos^4(45^0-\alpha)-\sin^4(45^0-\alpha)$; 34) $\frac{1+\cos 2\alpha}{\cos\alpha}-\cos\alpha$;

35) $1-2\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$; 36) $(1-\cos 2\alpha)\cdot ctg\alpha$;

37) $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$; 38) $\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$.

283. Знайти:

1) $\sin 2\alpha;\cos 2\alpha$, якщо $\sin\alpha=\frac{7}{25},\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

2) $\sin 50^0$, якщо $\sin 25^0=a$;

3) $\cos\frac{\pi}{9}$, якщо $\cos\frac{\pi}{18}=a$; 4) $tg\frac{2\pi}{9}$, якщо $tg\frac{\pi}{9}=a$.

284. Знайти: $\sin\frac{\alpha}{2};\cos\frac{\alpha}{2};tg\frac{\alpha}{2}$, якщо:

1) $\cos\alpha=0{,}6;0<\alpha<\frac{\pi}{2}$; 2) $\sin\alpha=0{,}6;\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$; 3) $\cos\alpha=0{,}8;0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

285. Відомо, що $\sin\alpha=\frac{5}{13}$ і α – кут II чверті. Знайти:

1) $\sin 2\alpha$; 2) $\cos 2\alpha$; 3) $tg2\alpha$.

286. Відомо, що $tg\alpha=\frac{3}{4};\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$. Знайти:

1) $\sin 2\alpha$; 2) $\cos 2\alpha$; 3) $tg2\alpha$.

287. Знайти $\cos 2\alpha$, якщо:

1) $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ і $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$; 2) $\cos\alpha=\frac{1}{3};\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

288. Знайти $\sin 2\alpha$, якщо $\cos\alpha-\sin\alpha=-\frac{1}{2}$.

289. Дано: $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{4}{5}$; $0<\alpha<\pi$. Знайти: $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$.

290. Дано: $tg\frac{\alpha}{2}=4$. Знайти: $tg\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$.

291. Обчислити $tg2\alpha$, якщо $tg\alpha=-3$, $90^0<\alpha<180^0$.

292. Представити у вигляді добутку вираз:

1) $1+\cos\alpha$; 2) $1-\cos 8\alpha$; 3) $1+\cos 10^0$;

4) $1-\cos 40^0$; 5*) $1+\sin\alpha$; 6*) $1-\sin 2\alpha$.

293. Понизити степінь виразу:

1) $\cos^2 2\alpha$; 2) $\sin^2 4\beta$; 3) $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}-15^0\right)$;

4) $\sin^2\left(\frac{7\alpha}{2}+25^0\right)$; 5) $tg^2 2\alpha$; 6) $ctg^2\frac{\alpha}{2}$.

294. Спростити:

1) $\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\alpha}{2}}{2}}$; 2) $\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$; 3) $\sqrt{\frac{1-\cos 4\alpha}{1+\cos 4\alpha}}$;

4*) $\sqrt{\frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}}$; 5) $\frac{1+\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha}$; 6) $2\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos\alpha$;

7) $\cos\alpha-2\cos^2\frac{\alpha}{2}$; 8*) $\frac{1+\cos 2\alpha}{\cos\alpha}\cdot\sin\alpha$; 9*) $\frac{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}$;

10*) $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{1+\cos 2\alpha}$.

295*. Дано: $\cos\alpha=m$, $\pi<\alpha<2\pi$. Знайти: $\cos\frac{\alpha}{2},\sin\frac{\alpha}{2}$.

296*. Дано: $\cos 4\alpha=n$, $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$. Знайти: $\cos 2\alpha,\sin 2\alpha$.

Життєва математика

297. Літр бензину на автозаправці коштує 22 грн. Марія залила в бак 30 літрів бензину та придбала пакет соку вартістю 12 грн. скільки решти вона отримає із 700 грн?

Сума та різниця синусів і косинусів

298. Перетворити вираз в добуток:

1) $\cos 50^0+\cos 40^0$; 2) $\sin 62^0-\sin 32^0$; 3) $\sin 16^0+\sin 44^0$;

4) $\cos\frac{\pi}{8}+\cos\frac{3\pi}{8}$; 5) $\sin 5\alpha-\sin 2\alpha$; 6) $tg31^0-tg1^0$;

7) $\cos 25^0-\cos 85^0$; 8) $\sin\frac{\pi}{12}+\sin\frac{5\pi}{12}$; 9*) $\cos\frac{5\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}$;

10*) $\sin\frac{\pi}{8}-\cos\frac{\pi}{8}$; 11) $\sin 3\alpha+\sin\alpha$; 12) $\cos 4\alpha-\cos 2\alpha$;

13) $\sin 5\alpha - \sin 2\alpha$; 14) $\cos 7\alpha + \cos\alpha$;

15) $\cos(x - y) + \cos(x + y)$; 16 $\sin(x + y) - \sin(x - y)$;

17) $\sin(30^0 + \alpha) + \sin(30^0 - \alpha)$; 18) $\cos(60^0 - \alpha) - \cos(60^0 + \alpha)$.

299. Довести, що:

1) $\sin 20^0 + \sin 40^0 - \cos 10^0 = 0$; 2) $\cos 85^0 + \cos 35^0 - \cos 25^0 = 0$.

300. Обчислити, не користуючись обчислювальними засобами:

1) $\sin\frac{7\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12}$; 2) $\sin\frac{11\pi}{12} - \sin\frac{5\pi}{12}$; 3) $\cos\frac{11\pi}{12} + \cos\frac{5\pi}{12}$;

4) $\cos\frac{7\pi}{12} - \cos\frac{\pi}{12}$; 5) $\sin 145^0 - \sin 35^0$; 6) $\cos 75^0 + \cos 15^0$;

7) $\sin 15^0 + \sin 105^0$; 8) $\cos 112^0 - \cos 248^0$; 9) $\cos 15^0 \cdot \cos 75^0$;

10) $\sin 105^0 \cdot \cos 15^0$; 11) $\cos 75^0 \cdot \cos 105^0$; 12) $\sin 75^0 \cdot \sin 15^0$.

301. Спростити вираз:

1) $\frac{\sin\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha}$; 2) $\frac{2(\cos\alpha + \cos 3\alpha)}{2\sin 2\alpha + \sin 4\alpha}$; 3) $1 + \sin\alpha + \cos\alpha$;

4) $\frac{\cos\alpha + \cos\beta}{\cos\beta - \cos\alpha}$; 5) $\frac{\sin\alpha + \sin 3\alpha}{\sin\alpha - \sin 3\alpha}$; 6) $\frac{\sin 4\alpha - \sin 2\alpha}{\cos 4\alpha - \cos 2\alpha}$;

7) $\cos^2\alpha - \sin^2 2\alpha$; 8) $\frac{\sin 5\alpha + \sin\alpha}{\cos 5\alpha + \cos\alpha}$; 9) $\frac{\cos 4\alpha - \cos 6\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 6\alpha}$.

302. Довести, що:

1) $\cos^4\alpha - \sin^4\beta + \sin 2\alpha = \sqrt{2}\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$;

2) $\frac{\sin 2\alpha + \sin 4\alpha - \sin 3\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 4\alpha - \cos 3\alpha} = tg3\alpha$;

3) $(\sin\alpha + \sin\beta)^2 + (\cos\alpha + \cos\beta)^2 = 4\cos^2\frac{\alpha - \beta}{2}$;

4) $(\sin 2\alpha + \sin 4\alpha)^2 + (\cos 2\alpha + \cos 4\alpha)^2 = 4\cos^2\alpha$;

5) $tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) - tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = 2tg\alpha$; 6) $\frac{1 + ctg2\alpha}{1 - ctg2\alpha} = \frac{\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}$.

303. Подати даний вираз у вигляді добутку або частки:

1) $\sqrt{2} + 2\cos\alpha$; 2) $\sqrt{3} - 2\cos\alpha$; 3) $\sqrt{3} - tg\alpha$; 4) $1 + tg\alpha$.

304. Зменшити степінь тригонометричної функції у виразі:

1) $2\cos^2 x$; 2) $2\cos^2 x \cdot \cos 2x$; 3) $2\sin^2 2x$; 4) $\cos^2 4x$.

305. Спростити вираз і обчислити його значення:

1) $\frac{\cos 68^0 - \cos 22^0}{\sin 68^0 - \sin 22^0}$; 2) $\frac{\sin 130^0 + \sin 110^0}{\cos 130^0 + \cos 110^0}$.

306. Перетворити добуток в частку:

1) $\sin 2\alpha \cdot \sin 4\alpha$; 2) $\cos 3\alpha \cdot \cos\alpha$; 3) $\sin\alpha \cdot \cos 2\alpha$;

4) $\sin 11^0 \cdot \cos 41^0$; 5) $\cos 25^0 \cos 85^0$; 6) $\sin 1^0 \cdot \sin 89^0$.

Життєва математика

307. Військовий збір у 2016 році складав 1,5% від заробітної плати. Заробітна плата директора приватного підприємства «Патріот» протягом року становила 8000 грн на місяць, а кожного з його робітників – по 6000 грн на місяць. Окрім військового збору, щомісяця директор перераховував 500 грн, а кожний з його робітників – по 300 грн у фонд на підтримку української армії. Яку загальну суму коштів сплатили робітники цього приватного підприємства у 2016 році на потреби української армії?

Періодичність функцій

308. Знайти значення виразу:

1) $\sin 390^0$; 2) $\cos 810^0$; 3) $tg(-300^0)$; 4) $ctg(-270^0)$;

5) $\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right)$; 6) $tg\left(\frac{25\pi}{6}\right)$; 7) $\sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$; 8) $ctg\frac{2001\pi}{4}$;

9) $\cos\frac{17\pi}{3}$; 10) $tg3360^0$; 11) $\sin\left(-\frac{123\pi}{4}\right)$; 12) $ctg(-1950^0)$;

13) $\cos 1125^0$; 14) $\sin(-315^0)$; 15) $tg\left(-\frac{17}{3}\pi\right)$; 16) $\cos\frac{13}{6}\pi$.

309. Довести, що число T, є періодом функції $y = f(x)$, якщо:

1) $y = \cos\frac{x}{2}, T = 4\pi$; 2) $y = \sin 2x, T = \pi$; 3) $y = ctg\pi x, T = 1$;

4) $f(x) = \sin\frac{x}{2}; T = 4\pi$; 5) $f(x) = 2tg3x, T = \frac{\pi}{3}$; 6) $f(x) = 3\cos 4x, T = \frac{\pi}{2}$;

7) $f(x) = ctg\frac{x}{3}, T = 3\pi$; 8) $f(x) = tg2x, T = \frac{\pi}{2}$.

310. Довести, що функція f є періодичною, якщо:

1) $f(x) = 1 + \cos x$; 2) $f(x) = ctg2x$.

311. Спростити:

1) $\sin^2(\alpha + 4\pi) + \cos^2(\alpha + 6\pi)$; 2) $tg(\alpha + 3\pi) \cdot ctg(\alpha - 5\pi)$;

3) $1 + ctg^2(\alpha - 7\pi)$; 4) $\frac{1}{\cos^2(2\alpha - 8\pi)} - 1$.

312. Довести рівність:

1) $\cos(t - \pi) = \cos(t + \pi)$; 2) $tg\left(2t - \frac{\pi}{3}\right) = tg\left(2t + \frac{2\pi}{3}\right)$.

313. На рис. 45, 46 зображено частини графіків функцій з періодом T. Побудувати графіки цих функцій на проміжку $[-2T; 2T]$.

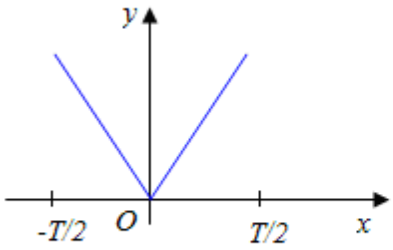


Рис. 45

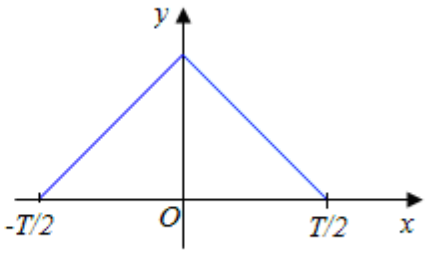


Рис. 46

314. Знайти найменший додатний період, якщо він існує, для функції:

1) $y = 2\sin\frac{x}{3}$; 2) $y = 3ctg\frac{3x}{2}$; 3) $y = \sin^2 x + \cos^2 x$;

4) $y = \cos 3x$; 5) $y = \sin\frac{2x}{3}$; 6) $y = tg5x$;

7) $y = \sin 2x$; 8) $y = \cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right)$; 9) $y = tg(2x - 1)$;

10) $y = \sin 4x$; 11) $y = \cos\frac{x}{5}$; 12) $y = tg\frac{2x}{5}$;

13) $y = ctg\frac{7x}{9}$; 14) $y = \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{9}\right)$; 15) $y = \cos\left(\frac{2}{9}x + \frac{\pi}{21}\right)$.

315. Чи є число T періодом функції f, якщо:

1) $f(x) = \cos\frac{x}{2}, T = 4\pi$; 2) $f(x) = tg\pi x; T = 2$;

3) $f(x) = \sin\frac{x}{3}, T = \frac{2\pi}{3}$; 4) $f(x) = ctg\frac{\pi x}{8}, T = 8$.

Властивості і графіки функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$

316. Побудувати графік функції $y = \sin x$, $x \in [-\pi; 2\pi]$ і вказати на ньому точки, для яких:

1) $\sin x = 1$; 2) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sin x = \frac{1}{3}$;

4) $\sin x < 0$; 5) $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$; 6) $\sin x < -\frac{1}{2}$.

317. Побудувати графік функції $y = \cos x$, $x \in [-2\pi; \pi]$ і вказати на ньому точки, для яких:

1) $\cos x = -1$; 2) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\cos x = \frac{2}{5}$;

4) $\cos x > 0$; 5) $\cos x < \frac{1}{2}$; 6) $\cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

318. Розв'язати рівняння:

1) $\sin x = \frac{2}{\pi}x$; 2) $\cos x = -\frac{2}{\pi}x + 1$.

319. Знайти область визначення функції:

1) $y=\dfrac{2\sin x-3}{2}$; 2) $y=\dfrac{1}{\cos^2 x+3}$; 3) $y=\dfrac{1}{\sin x-1}$;

4) $y=\dfrac{1}{\cos x}$; 5) $y=\sqrt{\sin x}$; 6) $y=\sqrt{\dfrac{1}{\cos x}}$.

320. Які з функцій є парними, які – непарними, а які ні парними, ані непарними:

1) $y=\sin^2 x$; 2) $y=\sin^3 x$; 3) $y=x+\sin x$;

4) $y=3\sin x$; 5) $y=6\cos x$; 6) $y=x^2-\cos 3x$;

7) $y=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$; 8) $y=\dfrac{1+\cos x}{x^2}$; 9) $y=x^3\sin x$;

10) $y=\dfrac{1-\cos x}{1-\sin^2 x}$; 11) $y=1+\sin x$; 12) $y=\dfrac{x}{\sin x}$;

13) $y=x^4 cos x$; 14) $y=x+\sin x$; 15) $y=\cos x^3+x^8$.

321. Знайти найбільше і найменше значення функції:

1) $y=3\sin^2 x+\dfrac{1}{3}$; 2) $y=4-5\cos x$; 3) $y=|\cos x|-2$.

322. Розбити даний відрізок на два проміжки так, щоб на одному із них функція $y=\sin x$ спадала, а на одному – зростала:

1) $\left[\dfrac{\pi}{2};2\pi\right]$; 2) $\left[-\pi;\dfrac{\pi}{2}\right]$; 3) $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

323. Розбити даний відрізок на два проміжки так, щоб на одному з них функція $y=\cos x$ набувала невід'ємних значень, а на другому – недодатних:

1) $[0;\pi]$; 2) $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$; 3) $\left[\dfrac{\pi}{2};2\pi\right]$.

324. Знайти проміжки зростання і спадання функції:

1) $y=2\cos x$; 2) $y=\sin x-3$; 3) $y=2\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)$;

4) $y=1-\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$; 5) $y=0{,}5\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$; 6) $y=1+\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

325. Порівняти числа:

1) $\sin 37^0$ і $\sin 86^0$; 2) $\sin 220^0$ і $\sin 260^0$; 3) $\cos 200^0$ і $\cos 230^0$;

4) $\sin\left(-\dfrac{\pi}{8}\right)$ і $\sin\left(-\dfrac{\pi}{10}\right)$; 5*) $\cos\left(-\dfrac{\pi}{7}\right)$ і $\sin\dfrac{4\pi}{7}$; 6) $\sin(-3)$ і $\sin(-2)$;

7) $\cos\dfrac{\pi}{7}$ і $\sin\dfrac{\pi}{7}$; 8*) $\cos\left(-\dfrac{\pi}{8}\right)$ і $\sin\dfrac{3\pi}{8}$; 9) $\sin\dfrac{\pi}{6}$ і $\sin\dfrac{\pi}{8}$;

10) $\cos 40^0$ і $\cos 75^0$; 11) $\cos\left(-\dfrac{6\pi}{7}\right)$ і $\cos\left(-\dfrac{\pi}{8}\right)$; 12) $\sin\dfrac{13\pi}{7}$ і $\sin\dfrac{11\pi}{7}$;

13) $\sin\left(-\dfrac{7\pi}{8}\right)$ і $\sin\left(-\dfrac{8\pi}{9}\right)$; 14) $\sin\left(-\dfrac{8\pi}{7}\right)$ і $\sin\left(-\dfrac{9\pi}{8}\right)$; 15) $\cos\dfrac{\pi}{7}$ і $\cos\dfrac{8\pi}{9}$;

326. Зростає чи спадає функція $y=\cos x$ на відрізку:

1) $[\pi;2\pi]$; 2) $[0;\pi]$; 3) $\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{5\pi}{6}\right]$; 4) $[-2;-1]$.

327. Знайти множину значень функції:

1) $y = \sin 3x;$ 2) $y = 3\sin x;$ 3) $y = 3\cos x - 1;$ 4) $y = \cos^2 x;$

5) $y = \frac{1}{2}\sin^2 x - 1;$ 6) $y = 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right);$ 7) $y = 3\cos 2x - \frac{\pi}{6}.$

328. Упорядкуйте числа у порядку зростання:

1) $\sin 11^0;\ \sin 27^0;\ \sin 14^0;$ 2) $\sin 0{,}4;\ \sin 0{,}3;\ \sin 1{,}1;$

3) $\cos 2^0;\ \cos 5^0;\ \cos 4^0;$ 4) $\cos 0{,}2;\ \cos 0{,}7;\ \cos 0{,}9.$

329. Побудувати графік функції:

1) $y = 2\cos x;$ 2) $y = \sin 3x;$ 3) $y = \cos\frac{x}{2} - 1.$

330. Які перетворення графіка функції $y = \sin x$ треба виконати, щоб отримати графік функції:

1) $y = 2\sin x;$ 2) $y = \frac{1}{3}\sin x;$

3) $y = \sin 2x;$ 4) $y = \sin\frac{x}{4};$

5) $y = \sin x + 2;$ 6) $y = \sin x - 3;$

7) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right);$ 8) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right);$

9) $y = |\sin x|.$

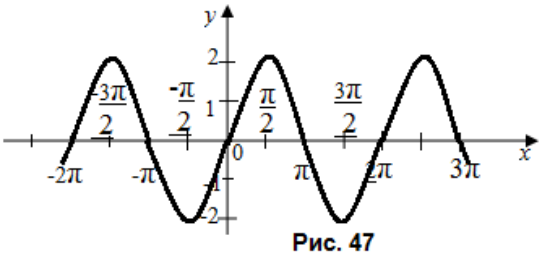


Рис. 47

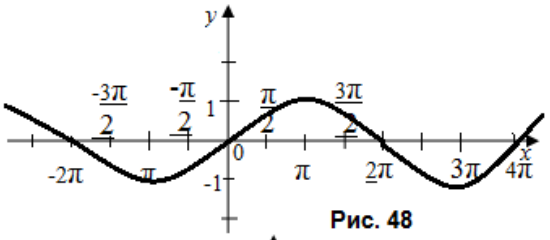


Рис. 48

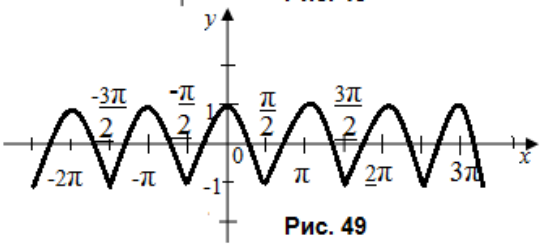


Рис. 49

331. 1) Визначити, графік якої функції зображено на рис. 47-49.

2) Заповнити таблицю, відповівши на запитання.

№		Рис. 47	Рис. 48	Рис. 49
1	Функція			
2	Область визначення			
3	Область значень			
4	Період			
5	Парна чи непарна			
6	Точки перетину з віссю абсцис			
7	Точки перетину з віссю ординат			
8	Значення x, для яких $f(x) > 0$			
9	Значення x, для яких $f(x) < 0$			
10	Проміжки зростання			
11	Проміжки спадання			
12	Максимум функції			
13	Точки максимуму			
14	Мінімум функції			
15	Точки мінімуму			

Властивості і графіки функцій $y = tgx$ і $y = ctgx$

332. Знайти область визначення функції:

1) $y = tg3x$; 2) $y = tg\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; 3) $y = \frac{1}{ctgx}$;

4) $y = \frac{1}{tgx + 1}$; 5) $y = tgx + 1$; 6) $y = tg(x - 1)$;

7) $y = ctg(x - 2)$; 8) $y = ctgx + 2$; 9) $y = ctg3x$.

333. Які з функцій є парними, які – непарними, а які ні парними, ані непарними:

1) $y = tgx\cos 2x$; 2) $y = tgx + ctgx$; 3) $y = tg2x\sin x$;

4) $y = \frac{\sin x + tgx}{x^2}$; 5) $y = ctgx + \cos x$; 6) $y = \frac{x + \sin x}{tg^3 x}$;

7) $y = \mathrm{x}^2 + xtg\mathrm{x}$; 8) $y = ctg\frac{1}{\mathrm{x}^2 + 1}$; 9) $y = \frac{ctg\mathrm{x}}{\sin\mathrm{x}}$;

10) $y = tg\mathrm{x}^3$; 11) $y = \mathrm{x}^4 + ctg^2\mathrm{x}$; 12*) $y = tg\frac{1}{\mathrm{x} - 1}$.

334. Порівняти числа:

1) $tg(-80^0)$ і $tg(-50^0)$; 2) $tg\frac{\pi}{5}$ і $tg\frac{4\pi}{5}$; 3) $tg1$ і $tg1{,}6$;

4) $tg(-2)$ і $tg(-3)$; 5) $ctg\left(-\frac{\pi}{8}\right)$ і $ctg\frac{\pi}{9}$; 6) $ctg95^0$ і $ctg117^0$;

7) $ctg2$ і $ctg3$; 8) $tg\frac{\pi}{6}$ і $ctg\frac{\pi}{4}$; 9) $tg\frac{5\pi}{8}$ і $\mathrm{tg}\frac{\pi}{8}$;

10) $tg\frac{\pi}{3}$ і $tg\frac{\pi}{7}$; 11) $tg\left(\frac{7\pi}{8}\right)$ і $tg\left(\frac{8\pi}{9}\right)$; 12) $tg\left(-\frac{7\pi}{8}\right)$ і $tg\left(-\frac{8\pi}{9}\right)$;

13) $tg\left(-\frac{\pi}{5}\right)$ і $tg\left(-\frac{\pi}{7}\right)$; 14) $ctg\left(\frac{\pi}{8}\right)$ і $ctg\left(\frac{\pi}{11}\right)$; 15) $ctg\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ і $ctg\left(\frac{5\pi}{4}\right)$;

16) $ctg\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ і $ctg\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$; 17) $ctg\left(-\frac{3\pi}{8}\right)$ і $ctg\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

335. Чому дорівнює на проміжку $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$ найбільше значення функції:

1) $y = tgx$; 2) $y = ctgx$.

336. Вказати проміжки зростання і спадання функції:

1) $y = ctg2x$; 2) $y = ctgx - 1$; 3) $y = 2tgx$;

4) $y = tg\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; 5) $y = tg^2 x$; 6) $y = ctg^2 x$;

7) $y = tg\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$; 8) $y = 2 + ctg\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$.

337. Розставити числа в порядку спадання:

1) $tg10^0$; $\mathrm{tg}49^0$; $\mathrm{tg}25^0$; 2) $tg(-2)$; $\mathrm{tg}(-3)$; $\mathrm{tg}(-1)$;

2) $ctg(-5^0)$; $\mathrm{ctg}(-18^0)$; $\mathrm{ctg}(-3^0)$; 4) $ctg1{,}7$; $\mathrm{ctg}1{,}5$; $\mathrm{ctg}1{,}3$.

338. Знайти множину значень функції:

1) $y = tg(x+1)$; 2) $y = ctgx - 1$; 3) $y = ctgx, 0 < x < \frac{\pi}{4}$;

4) $y = tg^2 x$; 5) $y = tgx \cdot ctgx$; 6) $y = ctg^3 x$;

7) $y = -ctg^2 x$; 8) $y = tg(x+1)$; 9) $y = ctgx - 1$.

339. Вказати найбільше і найменше значення функції:

1) $y = tgx, -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$; 2) $y = ctg\frac{x}{2}, \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{2\pi}{3}$; 3) $y = \sin x + tgx, 0 \le x \le \frac{\pi}{4}$.

340. Побудувати графік функції:

1) $y = tgx, x \in \left(-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right)$; 2) $y = ctgx, x \in (-\pi; 0)$;

3) $y = ctgx - 1$; 4) $y = tg\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; 5) $y = tg\frac{x}{2}$.

Життєва математика

341. Для дорослих вхідний квиток на 2-й поверх Ейфелевої вежі коштує 8 євро, для осіб віком 12-24 роки – 6,4 євро, а для дітей 4-11 років – 4 євро. Родина тернопільчан, що складається з батька, мами, студента Сергія (19 років), школярки Марійки (10 років) та малюка Ореста (2 роки), хоче відвідати 2-й поверх Ейфелевої вежі. У паризькому банку 1 євро коштує 32 грн. Яку суму (у грн) заплатить ця родина за таку екскурсію. Округліть до цілих гривень.

Найпростіші тригонометричні рівняння виду $\sin t = a$, $\cos t = a$

342. Обчислити:

1) $\sin\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$; 2) $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$; 3) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$;

4) $\cos\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$; 5) $\sin(\arccos 0{,}6)$; 6) $\cos(\arcsin(-0{,}8))$;

7) $tg\left(arcctg\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; 8) $ctg(arcctg(-1))$; 9) $tg\left(arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$.

343. Знайти значення виразу:

1) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 3) $\arccos\frac{1}{2}$;

4) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 6) $\arcsin 0$;

7) $\arcsin(-1) + \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; 8) $\arcsin\frac{1}{2} + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 9) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} - \arcsin 1$;

10) $\arcsin 0 - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$; 11) $\arccos(-1) + \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; 12) $\arccos 0 + \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$;

13) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)-\arccos\frac{1}{2}$; 14) $\arccos 1+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 15) $arctg(-1)+arctg\frac{\sqrt{3}}{3}$;

16) $arctcg0+arcctg\left(-\sqrt{3}\right)$; 17) $arcctg\sqrt{3}-arcctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; 18) $arctg0-arctg\sqrt{3}$;

19) $\arcsin 0-\arccos 0$; 20) $2\arccos\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{2}-3\arccos 1$;

21) $\arccos 0+\arcsin 0+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$; 22) $\arcsin(-0{,}98)+\arcsin(0{,}98)$.

23) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+arctg\sqrt{3}-\arccos(-1)$; 24) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+3\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}-4arcctg(-1)$.

344. Розв'язати рівняння:

1) $\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $cos\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}$;

4) $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $\sin\frac{x}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$; 6) $cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=4-\sqrt{7}$;

7) $\sqrt{2}\sin\frac{x}{3}=-1$; 8) $4\sin^2 x=3$; 9) $9\sin^2 x=-1$;

10) $(2\sin x+1)(1+\cos x)=0$; 11) $\cos 2x = -0{,}6$; 12) $\sin\frac{x}{3}=0{,}2$.

345. Знайти нулі функції:

1) $y=2\sin x+1$; 2) $y=\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{2}}{4}$; 3) $y=2\cos x+\sqrt{2}$.

346. Розв'язати рівняння:

1) $\frac{\sin x}{1+\cos x}=0$; 2) $\frac{\sin x}{\sin 3x}=0$; 3) $\frac{1+\cos 2x}{1-\sin x}=0$.

347. Вказати всі нулі функції:

1) $y=\sin x\sqrt{\cos x}$; 2) $y=\cos x\cdot tgx+1$.

348. Розв'язати рівняння:

1) $2\sin x-1=0$; 2) $\cos(x+2)=-\frac{1}{5}$; 3) $2\sin 3x+1=0$;

4) $\cos\left(\frac{2}{3}\pi-x\right)=-1$; 5) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$; 6) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}-5x\right)=-\frac{1}{2}$;

7) $2\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)-1=0$; 8) $\cos(x+0{,}5)=0{,}9$; 9) $2\sin 3x+5=0$;

10) $2\cos 3x+\sqrt{3}=0$; 11) $2\sin\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)-\sqrt{2}=0$; 12) $\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

13) $2\cos^2 3x=1$; 14) $\cos 2x\left(\sin\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)=0$; 15) $\sin\left(x+\frac{\pi}{5}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}=0$;

16) $2\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=-1$; 17) $\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

349. Знайти корінь рівняння:

1) $\sin x = 1$ на проміжку $[0;\pi]$; 2) $\cos x = -1$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]$;;

3) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ на проміжку $\left[0;\frac{\pi}{2};\right]$; 4) $\cos x = \frac{1}{2}$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$.

350. Знайти розв'язки рівняння, які належать указаному проміжку:

1) $\sin x = -\frac{1}{2},\ x \in \left[-\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$; 2) $\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2},\quad x \in [0;6\pi]$.

351. Знайти розв'язки рівняння, які задовольняють наведену умову:

1) $cos2x = 0, \cos x < 0$; 2) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sin 2x < 0$.

352*. Розв'язати рівняння:

1) $\sin x\cos 2x + \cos x\sin 2x = 1$; 2) $2\sin x \cdot \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $4\sin x \cdot \cos x = 1$;

4) $\cos^2 x - \sin^2 x = 0$; 5) $\sin^2 2x = 1$; 6) $\sin^2 \frac{x}{4} - cos^2 \frac{x}{4} = 1$;

7) $\sin 3x \cdot \cos x - \cos 3x \cdot \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 8) $\sin\frac{x}{3}\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{x}{3}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

9) $\sin x\cos 3x - \cos x\sin 3x = 0$; 10) $\cos 2x\cos 3x - \sin 2x\sin 3x = -1$;

11) $\sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} = \frac{1}{4}$; 12) $\cos^4 x - \sin^4 x = 0$; 13) $1 - \cos^2 x = 0$.

353. У яких точках перетинає вісь абсцис графік функції:

1) $y = 4\cos 3x + 4$; 2) $y = 5\sin 5x - 5$?

Найпростіші тригонометричні рівняння виду $tgt = a$, $ctgt = a$

354. Розв'язати рівняння:

1) $tgx = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $ctgx+1=0$; 3) $tg\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = 1$;

4) $tg\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; 5) $ctg\frac{x}{2} = -1$; 6) $tg2x = 3$;

7) $ctgx = 3 - \sqrt{2}$; 8) $tg^2\frac{x}{2} = 1$; 9) $ctg^2 x = 3$;

10) $ctg3x = -0{,}3$; 11) $\sqrt{3} - tg\left(x + \frac{\pi}{5}\right) = 0$; 12) $tg\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{\sqrt{3}}$;

13) $3ctg\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{3}\right) = \sqrt{3}$; 14) $ctg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}x\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; 15) $tg\pi x = \sqrt{3}$;

16) $(ctgx + 3)(tg^2 x + 1) = 0$; 17) $\left(2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1\right)(2ctgx + 1) = 0$; 18) $tg|x| = 1$.

355. Знайти нулі функції:

1) $y = tgx + 1$; 2) $y = \frac{1}{2}tgx - \frac{\sqrt{3}}{6}$; 3) $y = 2ctgx + \frac{6}{\sqrt{3}}$.

356. Знайти найменший додатний корінь рівняння:

1) $tg(3x+75^0)=1$; 2) $(ctgx+1)(\sqrt{3}+tgx)=0$; 3) $tg(5x+2)=0$.

357. Знайти розв'язки рівняння, що належать даному проміжку:

1) $tgx=-\sqrt{3}, x\in\left[-\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$; 2) $ctg2x=1,\quad x\in\left[-\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$;

3) $tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) $ctg\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=-1,\quad x\in\left[-\frac{3\pi}{2};\frac{\pi}{3}\right]$.

358. Знайти область визначення функцій:

1) $y=\frac{1}{tgx}$; 2) $y=\frac{1}{ctgx}$; 3) $y=\frac{1}{0{,}5\cos x+1}$.

359. Розв'язати рівняння:

1) $\frac{tg2x+tg3x}{1-tg2x\cdot tg3x}=0$; 2) $\frac{tg4x-tg3x}{1+tg4x\cdot tg3x}=1$; 3) $\frac{2tgx}{1-tg^2x}=1$.

Основні способи розв'язування тригонометричних рівнянь

360. Розв'язати рівняння, ввівши нову змінну:

1) $2\sin^2 x-3\sin x+1=0$; 2) $\sin^2 x-3\sin x=0$;

3) $\cos^2 x+2\cos x-3=0$; 4) $tg^2x-5tgx=0$;

5) $ctg^2x-ctgx-2=0$; 6) $ctg^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)+3ctg\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)-4=0$.

361. Пояснити, яким способом можна розв'язати рівняння:

1) $4\cos^2 x+\sin x=1$; 2) $tgx+5ctgx=6$;

3) $\sin 2x\cdot tgx=0$; 4) $2\sin x-\cos^2 x-2=0$;

5) $0{,}5\sin 2x+\cos^2 x=0$; 6) $tgx+ctgx=2$;

7) $4\cos^2 x+4\sin x-1=0$; 8) $2\cos^2 x=\sqrt{3}\sin 2x$.

362. Розв'язати рівняння, розклавши на множники ліву частину:

1) $\sqrt{2}\sin^3 x-\sin^2 x=0$; 2) $\cos 5x(1+\cos x)=0$;

3) $\sin 2x+\sin x=0$; 4) $\sin^2 x-\sin x=0$.

363. Розв'язати однорідні рівняння:

1) $\sin^2 x+5\sin x\cdot\cos x+4\cos^2 x=0$; 2) $3\sin^2 x-7\sin x\cdot\cos x+6\cos^2 x=1$;

3) $-4\sin^2 x\cdot\cos^2 x-9\cos^4 x=0$; 4) $\sin^2 3x=3\cos^2 3x$;

5) $\sin^2 x+\sin x\cdot\cos x-2\cos^2 x=0$; 6) $\sin x+\sqrt{3}\cos x=0$;

7) $\sin^2 x+\sin x\cdot\cos x-2\cos^2 x=0$; 8) $\sqrt{3}\sin x+3\cos x=0$.

364. Розв'язати рівняння за допомогою введення допоміжного аргументу:

1) $\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=0$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x=1$.

365. Розв'язати рівняння:

1) $\frac{2\cos^2 x}{7\cos x-3}=1$; 2) $ctgx-\cos x=1-\sin x$;

3) $1-3\cos^2 x=\sin 2x$; 4) $\sin 3x=\cos 3x$;

5) $\cos 2x + \cos^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x = 0;$ 6) $\sin x + \sin 3x = 0;$

7) $\sin 3x = \sin 2x + \sin x;$ 8) $\sin x + \sin 3x + \cos x + \cos 3x = 0;$

9) $\cos x - \cos 2x = \sin 3x;$ 10) $\sin^2 x + \sin^2 2x = 1;$

11) $\cos x - \sin x = 1;$ 12) $1 - \cos 2x = 4\sin x;$

13) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{3}{2};$ 14) $\cos 3x + \cos 5x = 0.$

Життєва математика

366. Ви хочете орендувати автомобіль на одну добу для поїздки на відстань 400 км. У таблиці наведено характеристики трьох автомобілів та вартість їх оренди. Крім оренди, ви маєте оплатити паливо для автомобіля на всю поїздку. Скільки коштуватиме ця поїздка, якщо ви виберете найдешевший варіант?

Вартість дизельного палива – 20 грн за літр, бензину – 22 грн за літр, газу – 12 грн за літр.

Автомобіль	**Паливо**	**Витрата палива (л на 100 км)**	**Орендна плата (грн за добу)**
А	Дизельне	7	500
Б	Бензин	10	400
В	Газ	14	450

Розділ 4. ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Границя функції в точці

367. Використовуючи графіки функцій (рис. 55), з'ясуйте:

1) Чи має границю функція в точці *x,* що прямує до 2? Якщо має, то чому дорівнює ця границя?

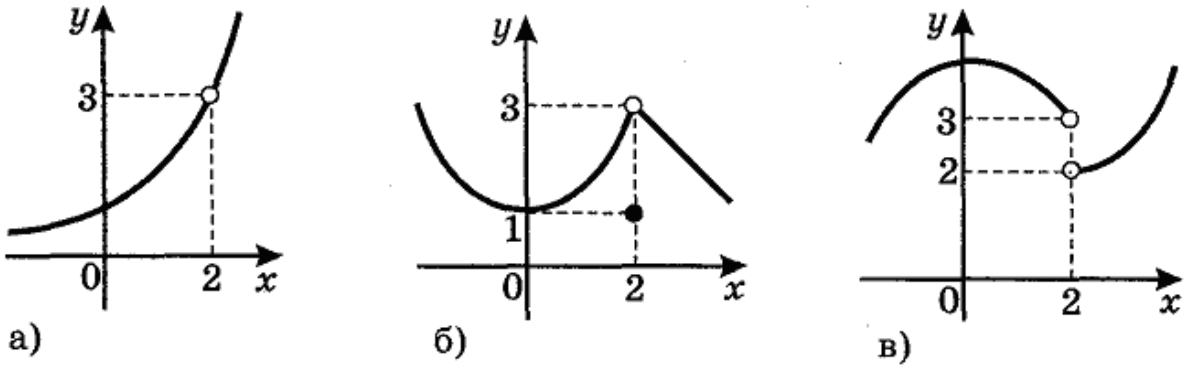


Рис. 55

2) Чи залежить існування границі функції в точці від визначеності функції в цій точці?

3) Якщо функція визначена в точці, то чи завжди границя функції дорівнює значенню функції в цій точці?

368. Користуючись графіком, знайти границі (якщо вони існують):

1) $\lim\limits_{x\to 3} 5x$; 2) $\lim\limits_{x\to 2} x^2$; 3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$.

369. Відомо, що $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$. Знайти границю в точці 1 для функції:

1) $y = 5f(x)$; 2) $y = \dfrac{3}{f(x)}$; 3) $y = \dfrac{7 + f(x)}{f(x) + 3}$.

370. Відомо, що $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$. Знайти:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3f(x) + 5g(x)}{f(x)\cdot g(x)}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - \frac{1}{2}g(x)}{8f(x)\cdot g^3(x)}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f^2(x) - g^2(x)}{f(x) - g(x)}$

.

371. Відомо, що $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = -3$, $\lim\limits_{x\to 3} g(x) = 2$. Знайти:

1) $\lim\limits_{x\to 3}(f(x) + g(x))$; 2) $\lim\limits_{x\to 3}(2f(x) + 3g(x))$; 3) $\lim\limits_{x\to 3}(3f(x) - g(x))$;

4) $\lim\limits_{x\to 3}(f(x)\cdot 3g(x))$; 5) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3f(x) - g(x)}{g(x)}$.

372. Знайти границі, користуючись неперервністю функції в точці:

1) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 + 2}{x + 2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{1 + \sin x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x} + 3}{x - 9}$;

4) $\lim\limits_{x\to1}\left(x^2+2x-5\right)$; 5) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2-9}$; 6) $\lim\limits_{x\to15}\dfrac{2x}{x-5}$;

7) $\lim\limits_{x\to1}\left(x^3+x^2-x+1\right)$; 8) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-4}{x-2}$; 9) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x}{x^3-x}$;

10) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+1}{x+1}$; 11) а) $\lim\limits_{x\to2}(3x-x^2)$; 12) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$;

13) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}+1}{x+3}$; 14) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$; 15) $\lim\limits_{x\to9}\dfrac{9-x}{\sqrt{x}-3}$;

16) $\lim\limits_{x\to2}(6x+x^2)$; 17) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{x}$; 18) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 7x}{x}$.

Життєва математика

373. У вересні 1 кг винограду коштував 20 грн, у жовтні виноград здорожчав 25%, а в листопаді по відношенню до ціни жовтня ще на 20%. Скільки став коштувати 1 кг винограду в листопаді?

Приріст функції. Приріст аргументу. Означення похідної

374. Знайти приріст функції $f(\mathrm{x})=\dfrac{1}{2\mathrm{x}-1}$ під час переходу від $x=0,6$ до $x=0,8$.

375. Знайти приріст функції $f(\mathrm{x})$ у точці x_0, якщо:

1) $f(\mathrm{x})=2\mathrm{x}^2-3, x_0=3, \Delta x=-0,2$; 2) $f(\mathrm{x})=\dfrac{x^2}{2}, x_0=2, \Delta x=0,1$.

376. Знайти прирости Δx і Δf у точці x_0, якщо:

1) $f(\mathrm{x})=\sqrt{2\mathrm{x}-1}, x_0=1,22, x=1,345$; 2) $f(\mathrm{x})=tg\mathrm{x}, \mathrm{x}_0=\dfrac{\pi}{4}, x=\dfrac{\pi}{3}$.

377. Користуючись означенням похідної, знайти $f'(x)$, якщо:

1) $y=4\mathrm{x}^2+2,\ \mathrm{f}'(1)$; 2) $y=\dfrac{1}{\mathrm{x}^2},\ \mathrm{f}'(2)$;

3) $y=\mathrm{x}^2+3x+1,\ \mathrm{f}'(1)$; 4) $y=3\mathrm{x}-1,\ \mathrm{f}'(0)$.

378. Користуючись означенням похідної, знайти похідну функції f, якщо:

1) $f(x) = x^2 + 1$ в точці 1; 2) $f(x) = x^3$ в точці 1;

3) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ в точці 1; 4) $f(x) = \sqrt{x}$ в точці 1.

379. Користуючись означенням похідної, знайти $f'(x)$, якщо:

1) $f(x) = 2x + 3$; 2) $f(x) = x^2 + x$;
3) $f(x) = 5x^2 + 6x$; 4) $f(x) = 3x^2 + 5x + 6$.
5) $y=\mathrm{x}^2+2$; 6) x^3+2x^2+5.

380. Користуючись означенням похідної, знайти похідну функції:

1) $y = \frac{k}{x}$; 2) $y = 3 - 5x$; 3) $f(x) = kx + b$; 4) $y = 3x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2$.

381. За допомогою формули *(kx + b)' = k*, знайти похідні функції:

1) *f(x) = 3x + 4*; 2) *f(x) = 6x - 1*;
3) *f(x) = 10*; 4) *f(x) = 5x*.

Похідні елементарних функцій

382. (Усно) Знайти похідну функцій:

1)1, 5, -7, $\sqrt{3}$; 2) x,-x,2x,-$\frac{1}{2}x$.

383. Знайти похідну функцій:

1) $y = x^{20}$; 2) $y = x^{10}$; 3) $y = x^{-8}$; 4) $y = x^2 \cdot x^{12}$;

5) $y = x^3 \cdot x^9 \cdot x^{-4}$; 6) $y = \frac{x^{13}}{x^4}$; 7) $y = -\frac{1}{x^9}$; 8) $y = \frac{x}{x^5}$;

9) $y = x^2 \cdot x$; 10) $y = x^{19}$; 11) $y = -\frac{1}{x^8}$; 12) $y = \frac{x^2}{x^5}$;

13) $y = x^5 \cdot x$; 14) $y = 3x + 2$; 15) $y = -16x$; 16) $y = -4$.

384. Обчислити значення $f'(x_0)$ для функції:

1) $f(x) = \sin x,\ x_0 = \frac{\pi}{2}$; 2) $f(x) = \cos x,\ x_0 = -5\pi$;

3) $f(x) = \cos x,\ x_0 = \frac{\pi}{6}$; 4) $f(x) = tgx,\ x_0 = \frac{\pi}{4}$;

5) $f(x) = ctgx,\ x_0 = \frac{\pi}{3}$; 6) $f(x) = \sin x,\ x_0 = -\frac{\pi}{6}$.

385. Знайти похідні функцій:

1) $y = \sin x$ в точці $x = 2\pi$; 2) $y = \cos x$ в точці $x = \frac{\pi}{2}$;

3) $y = tg\,x$ в точці $x = \frac{\pi}{3}$; 4) $y = ctg\,x$ в точці $x = \frac{\pi}{2}$;

5) $y = \sin x$ в точці $x = \pi$; 6) $y = \cos x$ в точці $x = \frac{\pi}{3}$;

7) $y = tg\,x$ в точці $x = \frac{\pi}{4}$; 8) $y = ctg\,x$ в точці $x = \frac{\pi}{6}$.

Життєва математика

386. Придбавши товар, ви сплатили 50 грн податку на додану вартість (ПДВ). Знайдіть вартість товару, якщо ставка ПДВ складає 20% від вартості товару.

Геометричний та фізичний зміст похідної. Дотична до графіка функції

387. Точка рухається по закону $s(t) = 1 + 2t^2$ *(м)*. Знайти швидкість руху точки в момент часу *t = 1 с*.

388. Знайти миттєву швидкість руху точки, якщо:

1) $s(t) = 3t + 1$; 2) $s(t) = 3 - 2t$; 3) $s(t) = \frac{5}{2} t^2 \cdot$, 4) $s(t) = 3t^2$.

389. Точка рухається прямолінійно за законом $s(t) = 2t^3 - 3t$ (s — шлях в метрах, t — час в секундах). Обчисліть швидкість руху точки та прискорення точки:

1) в момент часу t; 2) в момент $t = 2$ с.

390. Рух точки відбувається за законом $s(t) = t^2 - 4t + 6$. У який момент часу швидкість руху дорівнює:

1) 0; 2) 10?

391. Закон руху задано формулою $s(t) = t^3 - 2t^2 + 2$. Знайти $v(t), a(t)$ в момент часу $t = 1c$.

392. Відомо, що точка рухається за законом $s = \frac{1}{\sqrt{t+8}}$. Знайти миттєву швидкість руху точки в момент часу $t = 2c$.

393. Якщо тіло рухається за законом $s(t) = 5t^4 + 3t^3 + 3t^2 + 2t + 1/$. Обчисліть $v(t), a(t)$.

394. Закон руху задано формулою $s(t) = 4t^2 - 3t + 2$. Знайти $v(t), a(t)$.

395. Закон руху задано формулою $s(t) = 5t^2 - 3t + 2$. Знайти $v(t), a(t)$.

396. Точка рухається за законом $S = S(t)$ (S-вимірюється в метрах). Знайти миттєву швидкість точки в момент часу t_0, якщо:

1) $S'(t) = 3t^2 + 6t, t_0 = 1$с; 2) $S'(t) = t^2 - 3t, t_0 = 2$ с.

397. Точка рухається за законом $s = 2 + 20t - 5t^3$. Знайти миттєву швидкість і прискорення точки в момент $t = 1$ с (s вимірюється в метрах).

398. Відомо, що $f'(4) = 1$. Знайдіть:

1) кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = f(x)$, що проведена в точці з абсцисою $x_o = 4$;
2) кут, який утворює ця дотична з додатним напрямом осі абсцис.

399. Відомо, що тангенс кута нахилу дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою $x_o = -1$ дорівнює 3. Записати рівняння дотичної до графіка функції в цій точці, якщо $f(x_o) = 2$.

400. Який кут (гострий чи тупий) утворює з додатним напрямом осі OX дотична до графіка функції:

1) $y = x^2 + 2x$ в точці $x = 1$; 2) $y = x^2 + 2x$ в точці $x = -27$.

401. Записати рівняння дотичної до параболи $y = 3x^2 - 2$ у точці:

1) $x_o = -2$; 2) $x_o = 0$; 3)

402. Знайти tg кута нахилу дотичної до графіка функції f у заданій точці $(a; b)$.

1) $f(x) = x^2$, $M(-3;9)$; 2) $f(x) = x^3$, $M(-2;-8)$.

403. Який кут з віссю абсцис утворює дотична до графіка функції $f(x)=\sqrt{x}$ у точці з абсцисою:

1) $x_0=\frac{1}{12}$; 2) $x_0=0{,}75$; 3) $x_0=\frac{1}{4}$?

404. Чи існує точка, у якій дотична до графіка функції $f(x)=\sqrt{x}$ паралельна осі абсцис? Відповідь обґрунтуйте.

405. У якій точці дотична до графіка функції $f(x)=x^3$ паралельна прямій $y=\frac{1}{3}x+5$?

406. У якій точці графіка функції $f(x)=-\frac{1}{2}x^2$ дотична нахилена до осі абсцис під кутом: 1) 45^0; 2) 135^0.

407. Знайти рівняння дотичної до графіка функції $f(x)=\sqrt{x}$ в точці $x_0=9$.

408. Знайти дотичну синусоїди $y=\sin x$ у т. $M_0\left(\frac{\pi}{2};1\right)$.

409. Знайти рівняння дотичної до графіка функції $f(x)=x^3+2x^2-3x+1$ в точці $x_0=3$.

410. Дотична до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_o утворює з додатним напрямом осі OX кут 45°. Знайдіть $f'(x_o)$.

411. Знайти рівняння дотичної до графіка функції $f(x)=x^3-2x^2+1$ в точці $x_0=2$.

412. Знайти рівняння дотичної до параболи $f(x)=2-\frac{x}{2}-x^2$ в точці $x_0=2$.

413. Записати рівняння дотичної до кривої $y=x^2$ в точці $M_0(1;1)$.

414. Відомо, що тангенс кута нахилу дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою $x_o = -2$ дорівнює 4. Записати рівняння дотичної до графіка функції в цій точці, якщо $f(x_o) = 2$.

415. Чому дорівнює кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $f(x)=\frac{1}{2}x-3x^3+5x-1$ у точці $x_0=0$?

416. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $y = x^3 - x^2$ у точці з абсцисою $x_O = -1$.

417. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $f(x)=\ln(2x+2)$ у точці з абсцисою $x_O = -\frac{1}{2}$.

418. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $y = 2x^3 - 6x^2$ у точці з абсцисою $x_o = -2$.

419. Точка рухається за законом $s = = t^3 - 4t^2$. Знайти миттєву швидкість точки в момент $t = 5$ *с* (*s* вимірюється в метрах).

420. Чому дорівнює кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $f(x) = 2x - \frac{x^3}{3} + 6x - 0{,}5$ у точці $x_0 = 1$?

421. Точка рухається прямолінійно за законом $S(t) = \sqrt{t} + 4$. Розв'язати нерівність $v(t) > \frac{1}{4}$.

422. Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $x(t) = \frac{1}{t}$. У який момент часу t $(t>0)$ швидкість точки буде дорівнювати $-\frac{1}{9}$ м/с, якщо t вимірюється в секундах, x – у метрах?

Правила диференціювання

423. Знайти похідну функції:

1) $y = x^3 + x - x^4$; 2) $y = \sin x - \cos x$; 3) $y = -x^3 + \operatorname{tg} x$;

4) $y = \operatorname{ctg} x - \sqrt{x}$; 5) $y = 3x^2 - 5x + 6$; 6) $y = -2x^3 + 3\cos x$;

7) $y = 5x^2 + \frac{6}{x^2} + 3\operatorname{ctg} x$; 8) $y = 3x \cdot x^2 + 9\frac{x^2}{x^4}$; 9) $y = \sqrt{x}\sin x$;

10) $y = x^2 \cos x$; 11) $y = \frac{\sin x}{x^6}$; 12) $y = x^2\sqrt{x}\sin x$;

13) $y = x^{10} + x^5 + x$; 14) $y = \frac{\operatorname{tg} x}{x^3}$; 15) $y = 2x^2 + \frac{1}{2}x - 5^2$;

16) $y = \frac{5}{\sqrt{x}}$; 17) $y = x^2 \cdot \sin x$; 18) $y = \sqrt{x} + \sqrt{2}$.

424. Знайти значення похідної функції $f(x)$ в точці x_o:

1) $f(x) = \sin x + x^2$, $x_o = 0$; 2) $f(x) = \cos x - 1$, $x_o = \frac{\pi}{4}$;

3) $f(x) = x^2 + x - 7$, $x_o = -1$.

425. При яких значеннях x значення похідної функції $f(x)$ дорівнює 0:

1) $f(x) = x^3 - x$; 2) $f(x) = x^2 + x$; 3) $f(x) = x - \cos x$?

426. Знайти похідну функції:

1) $y = (x-2)^2 \cdot x^3$; 2) $y = (x^2 - x)(x^3 + x)$; 3) $y = (x^2 - 1)(x^3 + x)$;

4) $y = (x^2 + 1)(x^3 - 1)$; 5) $y = -x^3 + 9x^2 + x - 1$; 6) $y = \frac{4x^2 - 2}{6 - 3x}$;

7) $y = \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1}$; 8) $y = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 4}$; 9) $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - x}$; 10) $y = \frac{x^2}{x - 1}$;

11) $y = \frac{3x - 1}{3x + 1}$; 12) $y = \frac{12\sqrt{x}}{2x + 8}$; 13) $y = \frac{1 + \cos x}{\sin x}$; 14) $y = \frac{x}{\sin x}$;

15) $y = \frac{\cos x}{x^2}$; 16) $y = \frac{\sin x - \cos x}{x}$; 17) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x}}$;

18) $f(x) = (x+2)\sqrt[3]{x}$; 19) $f(x) = \frac{2x}{1-x^2} + \frac{1}{x}$; 20) $f(x) = \frac{2-x}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2-x}$;

21) $y = \frac{x-1}{x+1} + \frac{x+1}{x-1}$; 22) $y = \frac{x-2}{x+2} + \frac{x+2}{x-2}$.

427. Знайти $f'(0)$ і $f'(2)$, якщо:

1) $f(x) = x^2 - 2x + 1$; 2) $f(x) = x^2 + x + 1$;

3) $f(x) = x^3 - 2x$; 4) $f(x) = -x^3 + x^2$.

428. Знайти $f'(1)$ і $f'(3)$, якщо:

1) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$; 2) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x} + 1$;

3) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x^5}$; 4) $f(x) = x^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{3}{2}}$.

429. З'ясувати, при яких значеннях *x* похідна функції $f(x)$ дорівнює нулю, набуває додатних значень, набуває від'ємних значень, якщо:

1) $f(x) = x^3 - 2x$; 2) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 3$; 3) $f(x) = x^4 + 4x^3 + = -8x^2 - 5$.

430. Обчислити $f'(a)$, якщо: $f(x) = (x^2 + 4x - 1)(x^4 + 4)$, a = -2.

431. Знайти значення похідної функції *f(x)* при заданому значенні аргументу x_o:

1) *f(x)* = $\frac{2}{x-1}$, $x_o = -1$; 2) *f(x)* = *x cos x*, $x_o = \pi$;

3) *f(x)* = $\frac{2}{1-x}$, $x_o = -1$; 4) *f(x)* = *x*·*sin x*, $x_o = \frac{\pi}{2}$.

432. Знайти похідну функції $y = \sin x + \cos x$ та обчислити її значення, якщо x= $\frac{\pi}{4}$.

433. Дано: $f(x) = x^2$. Розв'язати рівняння $f(x) = f'(x)$.

434. Порівняти $g'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ і $g'\left(\frac{\pi}{6}\right)$, якщо $g(x) = \sin x$.

435. Що більше: $f'(0)$ чи $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$, якщо $f(x) = \cos x$?

436. Порівняти $g'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ і $g\left(\frac{\pi}{4}\right)$, якщо $g(x) = \cos x$.

437. Що менше: $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ чи $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$, якщо $f(x) = \sin x$?

438. Дано: $f(x) = \sin x, g(x) = \cos x$. Порівняти $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ і $g'\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

Життєва математика

439. Сашко і Павло разом можуть пофарбувати паркан за 9 годин, Павло і Ігор разом – за 12 годин, а Сашко і Ігор – за 18 годин. За скільки годин хлопчики пофарбують цей паркан, працюючи втрьох із тією самою продуктивністю праці?

Похідні степеневої, показникової та логарифмічної функцій

440. Знайти похідну функції:

1) $y = 3e^{x}$; 2) $y = 1 + 3^{x}$; 3) $y = 3x^{2} - 4^{x} - \sqrt{x}$;

4) $y = \frac{e^{x}}{2} + 2e^{x}$; 5) $y = 4 \cdot 7^{x}$; 6) $y = x^{3} \ln x$;

7) $y = \frac{x}{3} + 3e^{x}$; 8) $y = 7^{x} \cdot \log_{7} x$; 9) $y = 2\sin x - 2x$;

10) $y = \frac{3 \cdot 5^{x}}{\ln x}$; 11) $y = \log_{7} x$; 12) $y = \sqrt{x} \cdot \log_{5} x$;

13) $y = \frac{5}{x} - \log_{0,3} x$; 14) $y = \frac{4x^{2} + 2}{2e^{x}}$; 15) $y = 2^{x} \cos x$;

16) $y = \frac{\ln x}{x}$; 17) $y = \frac{\log_{\frac{1}{4}} x}{3x^{2} + x}$; 18) $y = \left(3x^{2} - 2\right) \cdot \log_{9} x$;

19) $y = \frac{\log_{\frac{1}{4}} x}{3x^{2} + x}$; 20) $y = \left(3x^{2} - 2\right) \cdot \log_{9} x$; 21) $y = 3^{x} + 4e^{x} - 3\cos x$;

22) $y = \frac{\sin x}{5^{x}} + \frac{1}{2}x - 3$; 23) $y = \left(3x + 5x^{2} + x^{3}\right) \cdot 4x$; 24) $y = \frac{x^{3}}{4^{x} + 5}$;

25) $y = \frac{0,3^{x}}{\sqrt{x} + 0,5}$; 26) $y = \log_{9} x - 9^{x}$; 27) $y = \sqrt{x} \cdot \log_{3} x$;

28) $y = \frac{2}{x^{2}} - \log_{0,5} x$; 29) $y = \frac{2x^{2} + 1}{3e^{x}}$; 30) $y = 3^{x} \sin x$;

31) $y = \frac{\ln x}{x^{2}} + \frac{1}{2}x$; 32) $y = \frac{\log_{\frac{1}{2}} x}{4x^{2} + x}$; 33) $y = \left(5x^{2} + 1\right) \cdot \log_{8} x$;

34) $y = 4^{x} + 2e^{x} - 6\cos x$; 35) $y = \left(2x - 5x^{2} - x^{4}\right) \cdot 2x$; 36) $y = \frac{x^{3}}{4^{x} + 5}$;

37) $y = \frac{0,5^{x}}{\sqrt{x} + 0,5}$; 38) $y = 10\lg x - \frac{x}{3} + 2e^{x}$.

441. Знайти похідну степеневої функції:

1) $y = x^{100}$; 2) $y = \sqrt[3]{x}$; 3) $y = x^{\sqrt{2}}$; 4) $y = x^{0.1}$; 5) $y = x^{\pi}$;

6) $y = -x^{5}$; 7) $y = -x^{20}$; 8) $y = \sqrt[10]{x^{7}}$; 9) $y = \frac{10}{x}$; 10) $y = 2x^{2}\sqrt{x}$;

11) $y=\frac{x\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[3]{x^2}}$; 12) $y=\frac{x^2+3x+x^7}{\sqrt{x^2+1}}$; 13) $y=\frac{3}{\sqrt{x^3}}+\frac{x}{2}-x^3$;

14) $y=\frac{\sqrt[3]{x^4}}{2}+\frac{3}{2}$; 15) $y=\sqrt{x}(2x+5)$; 16) $y=5x^3\sqrt[3]{x}$;

17) $y=4x^3\sqrt{x}$; 18) $y=\frac{x^2+3x+x^7}{\sqrt{x}+1}$; 19) $y=\frac{3}{\sqrt{x^4}}+\frac{x^2}{2}+x^4$;

20) $y=\frac{\sqrt[3]{x^4}}{2}+\frac{3}{2}$; 21) $y=\sqrt{x}(2x+5)$; 22) $y=5x^3\sqrt[3]{x}$;

23) $y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^5}-\sqrt[4]{x^2}+5$; 24) $y=\left(\frac{1}{5}x^5+7\right)^2\cdot 4\sqrt[3]{x^2}$; 25) $y=e^x+\sin x$;

25) $y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x^3}+5$; 26) $y=\ln x-\cos x$; 27) $y=\left(\frac{1}{5}x^5+7\right)^2\cdot 4\sqrt[3]{x^2}$.

442. Знайти значення похідної функції $f(x)=\frac{\sin x-\cos x}{\sin x}$ у точках, в яких значення цієї функції дорівнює нулю.

443. Чому дорівнює кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції:

1) $f(x)=2e^x$ у точці $x_0=0$; 2) $f(x)=2\ln x$ у точці $x_0=1$.

444. Знайти $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$, якщо: 1) $f(x)=1+tgx$; 2) $f(x)=1-ctgx$.

445. Доведіть тотожність $2xf'(x)-2xf(x)+\frac{1}{3}f(0)-f'(0)=-2$, якщо $f(x)=3e^x$.

Похідна складеної функції

446. Задати формулами елементарні функції *f* і *g*, із яких побудована складена функція *y = f(g(x)):*

1) *y = cos (2x + 3);* 2) $y=(2x+3)^7$;

3) $y=\sqrt{x^2+2x}$; 4) $y=\sin^2 x$.

447. Дано функції: $f(x)=\sin x$; $g(x)=\sqrt{x}$; $h(x)=x^5+1$. Побудувати функції:

1) *y=f(g(x));* 2) *y=f(h(x));* 3) *y = g(f(x));*

4) *y = g(h(x));* 5) *y= h(f(x));* 6) *y = h(g(x)).*

448. Задати формулами елементарні функції f і g, що входять до складеної функції $h(x)=g(f(x))$:

1) $h(x)=\cos 3x$; 2) $h(x)=tg\frac{x}{2}$; 3) $h(x)=\sin x^2$;

4) $h(x)=\sin^2 x$; 5) $h(x)=\sqrt{\cos x}$; 6) $h(x)=(3-5x)^7$;

7) $h(x)=\sqrt{2x+5}$; 8) $h(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

449. Знайти похідну функції:

1) $y = (3x + 2)^{50}$; 2) $y = (6 - 7x)^{10}$; 3) $y = \sqrt{3-2x}$;

4) $y = \sqrt{x^2 + 6x + 7}$; 5) $y = \cos 6x$; 6) $y = \sin^3 x$;

7) $y = \sqrt{tgx}$, 8) $y = \operatorname{ctg} x^4$; 9) $y = 4\sin^3 x \cdot \cos x$;

10) $f(x) = (2x-7)^8$; 11) $f(x) = (9x+5)^4$; 12) $f(x) = (4-3x)^{100}$;

13) $f(x) = (x^7 - 3x)^{56}$; 14) $f(x) = (x^3 - x\sqrt{x})^9$; 15) $f(x) = \left(3 - \frac{x}{2}\right)^{-9}$;

16) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$; 17) $f(x) = (5x-2)^{13} - (4x+7)^{-6}$; 18) $f(x) = \frac{1}{(5x+1)^3}$;

19) $y = \sqrt{1-2x}$; 20) $y = (4x^2 - 5x)^6$; 21) $y = \sqrt{3x^2 - 6x}$;

22) $f(x) = \frac{1}{(6x-11)^5}$; 23) $f(x) = \sqrt{1-x^4} + \frac{1}{(2x+1)^2}$; 24) $y = \sin^4 x$;

25) $y = tg\ 4x+3x-2$; 26) $y = lg\ \sin x$.

450. Задано функції $f(x) = 3 - 2x, g(x) = x^2, p(x) = \sin x$. Задати формулою складену функцію h, якщо:

1) $h(x) = f(g(x))$; 2) $h(x) = f(p(x))$; 3) $h(x) = p(g(x))$; 4) $h(x) = p(f(x))$.

451. Знайти точки, у яких $f'(x) = 0$, якщо:

1) $f(x) = \cos 3x$; 2) $f(x) = 2\sin^2 x - \sqrt{2}x$; 3) $f(x) = \sin 2x - \sqrt{3}x$.

452. Записати формулу залежності складної функції y від x, якщо $g(x) = \frac{1}{x}$; $h(x) = x^3 + 2$; $f(x) = \sqrt{x}$:

1) $y = f(g)$; 2) $y = g(h)$; 3) $y = h(f)$;

4) $y = f(h)$; 5) $y = g(f)$; 6) $y = h(g)$.

453. Знайти похідні функцій, які подано в таблиці .

	1	2	3	4
11	$y = (2x + 1)^3$	$y=(1 - 3x)^5$	$y = \sqrt{x-2}$	$y = \frac{1}{3x+1}$
2	$y = \cos^2 x + \sin^2 x$	$y = \cos 3x$	$y = \cos^2 x$	$y = \sin \frac{x}{2}$
3	$y = \sqrt{\sin x}$	$y = tg\ x \cdot ctg\ x$	$y = \frac{1}{(x-3)^2}$	$y = tg\ 2x$
4	$y = \cos^3 x$	$y = \sqrt{\sin 2x}$	$y = \sin^2 x^3$	$y = ctg \frac{x}{3}$

454. Знайти похідну функції $y = \frac{1 - \cos 4x}{\sin 4x}$ та обчислити її значення, якщо $x = -\frac{\pi}{8}$

455. Знайти похідну функції $y = \sin 4x + \cos 4x$ та обчислити її значення, якщо $x = \frac{\pi}{4}$.

456. Дано: $f(x)=\sin 2x,\ g(x)=2x-7.$ Розв'язати рівняння $f'(x)=g'(x)$.

457. На графіку функції $y=(x-2)^3$ знайти точку, в якій дотична паралельна до осі абсцис.

Ознаки сталості. Зростання та спадання функції

458. Довести, що функція $f(x)=x^7+4x^3-11$ зростає на всій числовій прямій.

459. Дослідити функцію $y=4x^3+6x^2-8$ на монотонність.

460. Довести, що функція $f(x)=x^3$ зростає на всій числовій прямій.

461. Зобразити схематично графік функції, що визначена при всіх дійсних значеннях змінної, яка:

1)зростає на проміжках $(-\infty;-2]$ і $[-1;3]$ та спадає на проміжках $[-2;-1]$ і $[3;+\infty)$;

2) має безліч проміжків зростання і спадання;

3)зростає на множині цілих значень x і спадає на множині всіх інших значень $x\in R$.

462. Довести, що функція:

1) $f(x)=x^3-3x^2+3x+2$ зростає при всіх $x\in R$;

2) $f(x)=5-2x+2x^2-\frac{2}{3}x^3$ спадає при всіх значеннях $x\in R$.

463. Відомо, що похідна функції $y=f(x)$ на відрізку $[-5;6]$ змінює свій знак, причому $f'(x)<0$ на проміжку $[-5;3)$ і $f'(x)>0$ на проміжку $(3;6]$. Описати характер зміни функції на відрізку $[-5;6]$.

464. Знак похідної змінюється за схемою, зображеною на рис. 56. визначити, на яких проміжках функція зростає, а на яких спадає.

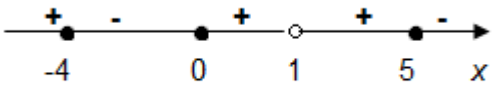


Рис. 56

465. На рисунках 57-59 зображено функції, визначені на *R*. Указати, на яких проміжках похідна функції додатна, а на яких - від'ємна.

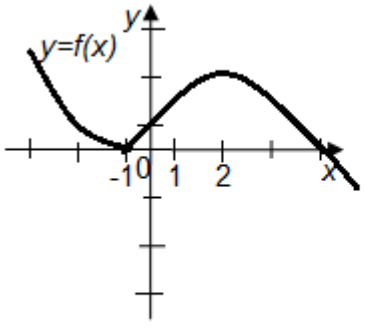


Рис. 57

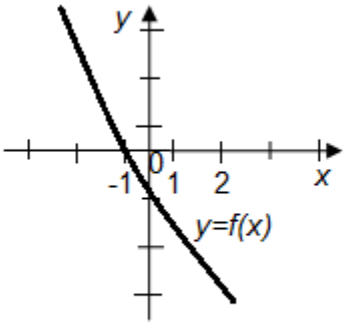


Рис. 58

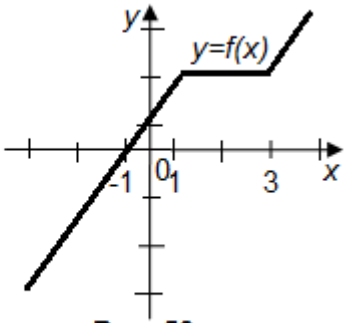


Рис. 59

466. На рис. 60 зображено графік функції. Визначити знак похідної на проміжках:

1) $(-\infty;-1)$; 2) $(-1;3)$; 3) $(3;7)$; 4) $(7;+\infty)$.

467. Знайти інтервали зростання і спадання функції:

1) $f(x)=x^3+2x-5$; 2) $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$; 3) $y=x^4$;

4) $y=(x-2)^2$; 5) $y=2-x^3$;

6) $y=1+\frac{2}{x}$;

7) $y=\sqrt{x}+2$;

8) $y=\frac{3}{x-2}$;

9) $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2$;

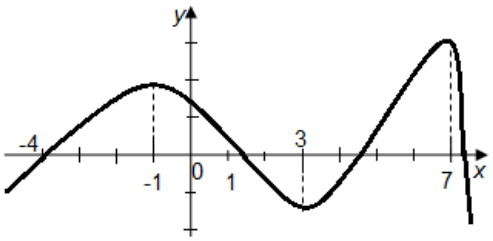


Рис. 60

10) $f(x)=(x-3)\sqrt{x}$; 11) $f(x)=x-x^3$;

12) $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$; 13) $f(x)=x^3+3x^2+x-8$; 14) $f(x)=3-\frac{x}{2}$;

15) $f(x)=-x^2+2x-3$; 16) $f(x)=x^4-4x+3$; 17) $y=\frac{5}{x+1}$;

18) $y=(x-3)^2$; 19) $f(x)=x^2-2x-9$; 20) $f(x)=9-8x-x^2$;

21) $f(x)=-81x+3x^3$; 22) $f(x)=(x-3)\sqrt{x}$; 23) $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$;

24) $f(x)=x^3+3x^2+x-8$; 25) $f(x)=-x^2+2x-3$; 26) $f(x)=5-2x+2x^2-\frac{2}{3}x^3$.

468. Знайти проміжки монотонності функцій:

1) $f(x)=x^3-5x^2-32x+9$; 2) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+5$.

469. При яких значеннях a функція $f(x)=\frac{x^3}{3}+0{,}5ax^2+16x-3$ зростає на R?

470. Який знак має похідна функції $y=f(x)$ і $y=g(x)$, зображених на рис.61-62, у точках з абсцисами $x_1;x_2;x_3;x_4$?

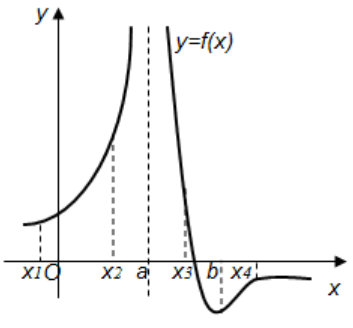


Рис. 61

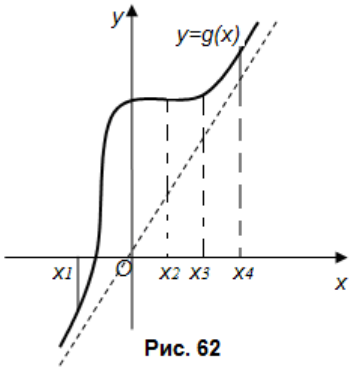


Рис. 62

471. Довести, що функція $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x-2$ зростає на всій числовій прямій.

472. Вказати інтервали зростання і спадання функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$, зображених на рис. 61-62.

473. На рис. 63-66, зображені графіки похідних функцій $y = f(x), y = g(x), y = h(x), y = u(x)$. Вказати проміжки зростання і спадання кожної з даних функцій.

Життєва математика

474. Заробітна плата оператора колл-центру пропорційна кількості відпрацьованих годин. За місяць було відпрацьовано 170 годин і за них нараховано 4590 грн. Скільки годин має відпрацювати оператор наступного місяця, щоб заробити 4860 грн?

Екстремуми функції

475. Функція $y = f(x)$ неперервна в точці $x_0 = 1$, причому $f'(x) < 0$ на проміжку $(0;1)$ і $f'(x) > 0$ на проміжку $(1;3)$. Чи є точка $x_0 = 1$ точкою максимуму чи мінімуму?

476. Функція $y = g(x)$ неперервна в точці $x_0 = 4$, причому $g'(x) > 0$ на проміжку $(1;4)$ і $g'(x) > 0$ на проміжку $(4;10)$. Чи є точка $x_0 = 4$ точкою максимуму чи мінімуму?

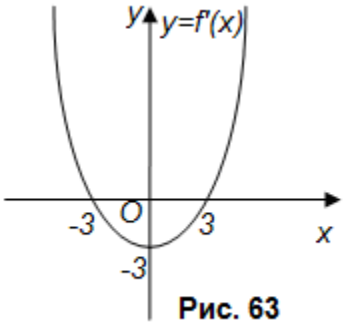


Рис. 63

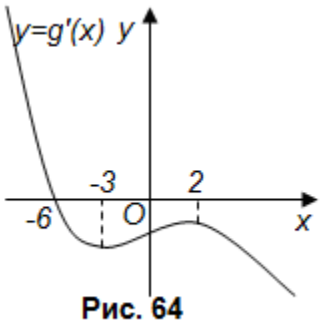


Рис. 64

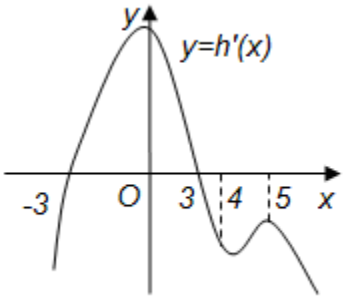


Рис. 65

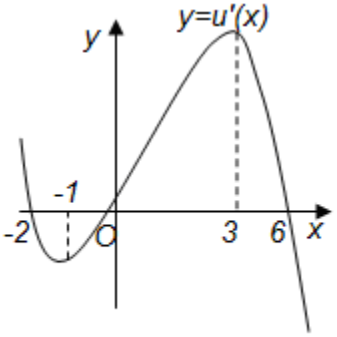


Рис. 66

477. Чи є точки -1 і 4 критичними, якщо функція $y = f(x)$ задана на відрізку $[-1;4]$?

478. Пояснити, чому подані функції не мають точок екстремуму:

1) $y=\frac{1}{x}$; 2) $y=12$; 13) $y=tgx$;

4) $y=x^5+x-3$; 5) $y=ctgx$; 6) $y=-\frac{1}{x^3}$.

479. Назвати точки максимуму та мінімуму функцій, зображених на рисунках 67-69. Назвати максимуми та мінімуми цих функцій.

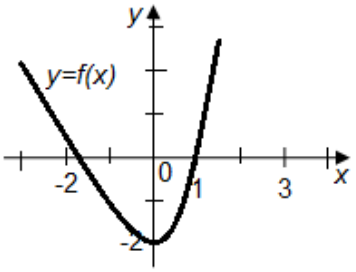


Рис. 67

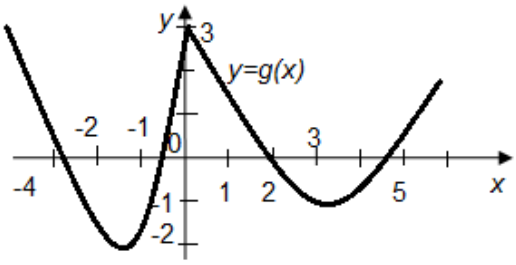


Рис. 68

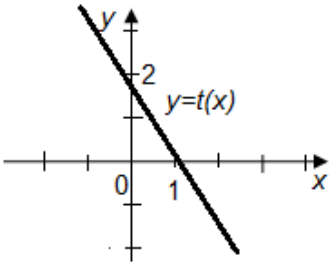


Рис. 69

480. За даними таблиці для функції $f(x)$ знайти:

1) проміжки зростання та спадання;
2) точки максимуму та мінімуму;
3) максимуми та мінімуми.

x	$(-\infty;-4)$	-4	$(-4;2)$	2	$(2;19)$	19	$(19;+\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	+	0	-
$f(x)$		-3		15		21	

481. Знайдіть проміжки монотонності та точки екстремуму функції:

1) $f(x)=x^3-27x$; 2) $f(x)=\frac{4x-5}{x+2}$; 3) $f(x)=\frac{x+2}{x^2+5}$;

4) $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$; 5) $y=\frac{x^4+24}{x^2}$; 6) $f(x)=4x^2-6x$;

7) $f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x$; 8) $f(x)=6x^5+15x^4+10x^3$;

9) $f(x)=x^2(x-12)^2$; 10) $f(x)=\frac{x^2}{x^2+3}$; 11) $f(x)=\frac{(x-2)(8-x)}{x^2}$.

482. Знайдіть точки екстремуму та екстремуми функції:

1) $y=4x-x^2$; 2) $y=2x^3+6x^2-12x+100$; 3) $y=\sqrt{x}$;

4) $y=\sin x$; 5) $f(x)=\frac{x}{4}+\frac{4}{x}$; 6) $f(x)=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$;

7) $f(x)=\sin x+\cos x$; 8) $y=\frac{1}{4}x^4-2x^2$; 9) $y=x^4-2x^2+3$;

10) $y=\frac{3x}{2+x^2}$; 11) $f(x)=(x+1)^2(x-2)^3$; 12) $f(x)=(x-3)^{\frac{1}{3}}(x-6)^{\frac{2}{3}}$.

13) $y=\frac{4}{x}+x$; 14) $f(x)=3x^4-4x^3$; 15) $f(x)=(x-2)^4$;

16) $f(x)=(x+1)\sqrt{x}$; 17) $f(x)=xe^{\frac{x}{2}}$; 18) $f(x)=\frac{x}{x^2-4}$;

19) $f(x)=\frac{1}{x^2-4x+3}$; 20) $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$; 21) $f(x)=\frac{7x}{2x^2-3x+2}$;

22) $f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}$; 23) $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$; 24) $f(x)=2x^3+6x^2-12x+100$.

483. Знайти критичні точки функції:

1) $f(x)=7+12x-x^2$; 2) $f(x)=16+8x^2-x^4$;

3) $f(x)=2x^3-3x^2-6$; 4) $f(x)=0{,}5x^4-x^2$.

З'ясуйте, які з них є точками максимуму, а які – точками мінімуму.

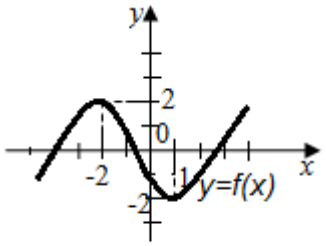


Рис. 70

484. Довести, що функція $f(x)$ не має критичних точок:

1) $f(x)=2\sqrt{x}$; 2) $f(x)=3x+7$; 3) $f(x)=4x^7+14x$.

485. Указати за рис. 70 абсциси точок, у яких $f'(x)=0$.

Життєва математика

486. Відстань l (у км) від спостерігача, що знаходиться на невеликій висоті h м над землею до лінії горизонту, за якою він спостерігає, обчислюється за формулою $l=\sqrt{\frac{Rh}{500}}$, де R=6400 км – радіус Землі. На якій найменшій висоті слід розташовуватися, щоб він бачив горизонт на відстані не менше ніж 4 кілометрів?

Дослідження функції та побудова її графіка за допомогою похідної

487. Описати послідовність операцій, які необхідно виконати для того, щоб дослідити функцію та побудувати її графік.

488. Користуючись графіками функції $y = f(x)$, зображених на рисунку 73, з'ясувати:

1) область визначення функції;

2) нулі функції і інтервали її знакопостійності;

3) точки екстремуму, екстремальні значення функції та інтервали її моно тонності.

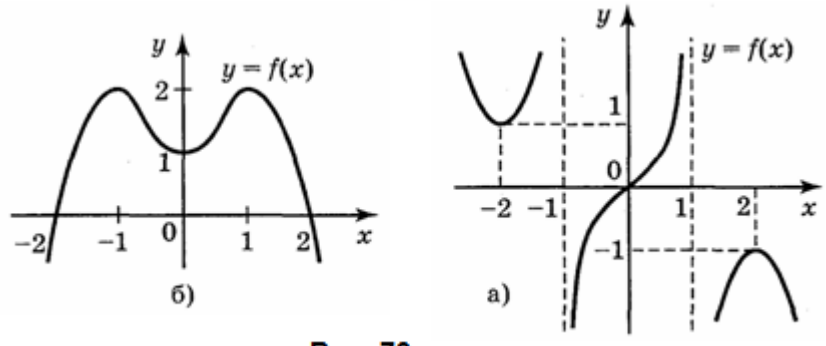


Рис. 73

489. На рисунку 74 зображено графік функції $y = f(x)$ визначеної і неперервної при $x \in R$. Користуючись графіком, вказати - її властивості та заповнити таблицю:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$							
$f(x)$							

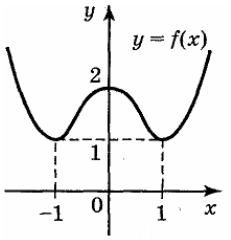


Рис. 74

490. Деякі властивості функції $y = f(x)$ описані в таблиці.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+	0	–
$f(x)$	↗	2	↘	0	↗	2	↘
		max		min		max	

Побудувати схематичний графік функції, якщо вона неперервна на множині всіх дійсних чисел.

491. Побудувати графіки функцій, дослідивши функції:

1) $y = x^4 - x^2$;
2) $y = x^2 - x^3$;
3) $y = \frac{2}{x} + \frac{x}{2}$;
4) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$;
5) $y = 1 - 2x^2 - \frac{x^3}{3}$;
6) $y = x^4 - 2x^2 - 3$;
7) $f(x) = 3x^2 - x^3$;
8) $f(x) = x^3 - 4x$;
9) $f(x) = 3x - x^3$;
10) $f(x) = x^3 - x^2$;
11) $f(x) = 3x^2 - x^3 - 2$;
12) $y = 2x^4 - x^2 + 1$;
13) $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$;
14) $y = \frac{4 + x^2}{2x}$;
15) $y = \frac{x^2 + 3x}{x - 1}$;
16) $f(x) = -9x + x^3$;
17) $f(x) = 6x - x^3$;
18) $y = x^3 - 6x + 2$.

492. Дослідити функцію $f(x) = x^3 - 3x^2$ і побудувати її графік. Скориставшись графіком функції, визначити кількість коренів рівнянь $x^3 - 3x^2 = 2$ і $x^3 - 3x^2 = -2$.

493. Дослідити функції та знайти їхні графіки на рисунках 75-79:

1) $y = x^2 - 2x + 3$;
2) $y = -x^2 + 4x + 5$.

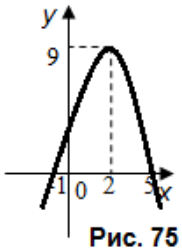


Рис. 75

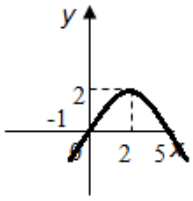


Рис. 76

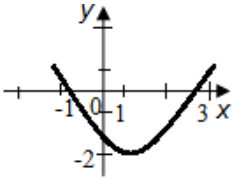


Рис. 77

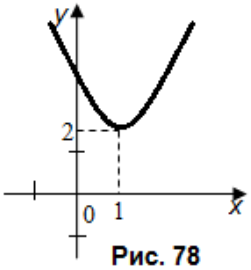


Рис. 78

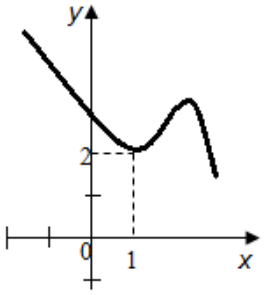


Рис. 79

494. Побудувати графіки функцій, дослідивши функції:

1) $y = xe^{-x}$; 2) $y = xe^{-x^2}$; 3) $y = x^2e^{-x^2}$; 4) $y = \frac{e^x}{x}$;

5) $y = x - \ln x$; 6) $y = 2\ln x - x^2$; 7) $y = x^2\ln^2 x$; 8) $y = \frac{x}{\ln x}$.

495. Дослідити функцію $f(x) = xe^x$ та побудувати її графік.

496. Дослідити функцію $y = \frac{\ln x}{x}$ та побудувати графік цієї функції.

Життєва математика

497. Висота над землею підкинутого вгору м'яча змінюється за законом $h(x) = 1{,}6 + 8t - 5t^2$, де h- висота в метрах, t – час, що минув з моменту підкидання, у секундах. Скільки секунд м'яч перебуватиме на висоті не менше трьох метрів?

Найбільше та найменше значення функції на відрізку

498. На рисунках 71, 72 зображено графіки функцій $f(x)$та $g(x)$, які задані на відрізку $[a;b]$. Для кожної з них знайти:

1) точки максимуму та мінімуму;

2) точки, у яких функція набуває найбільшого і найменшого значення на відрізку $[a;b]$.

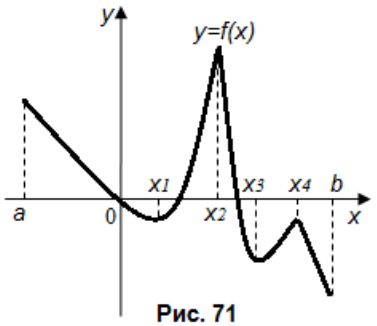


Рис. 71

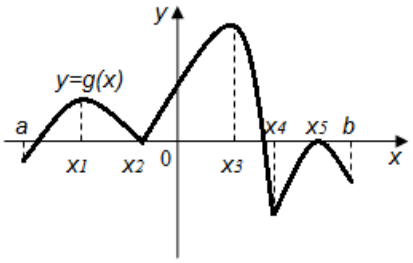


Рис. 72

499. Відомо, що на відрізку $[a;b]$ функція $y = f(x)$ має максимуми, що дорівнюють 3 і 6, і мінімум, що дорівнює 2, $f(a) = -2, f(b) = 0$. Чому дорівнюють найбільше та найменше значення цієї функції на відрізку $[a;b]$?

500. Знайти найбільше та найменше значення функції $f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x + 2$ на відрізках: 1) $[-5;7]$; 2) $[-2;6]$; 3) $[-1;4]$.

501. Знайти найбільше значення функції $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ для $x \in [0;+\infty)$.

502. Знайти найбільше значення функції $f(x) = \frac{5-x^3}{x}$ для $x \in (-\infty;0)$.

503. Знайти найбільше та найменше значення функції:

1) $f(x)=x^4-8x^2-9$ на відрізках $[-1;1]$ і $[0;3]$;

2) $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x}$ на відрізках $[-4;-1]$ і $[1;3]$;

3) $f(x)=3x^5-5x^3$ на відрізках $[0;2]$ і $[2;3]$;

4) $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ на відрізках $[-3;-2]$ і $[1;5]$;

5) $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-6x^2+32x$ на відрізку $[0;9]$; 6) $f(x)=x+\sqrt{x}$ на відрізку $[1;4]$.

504. Число 24 подайте у вигляді суми двох невід'ємних доданків так, щоб добуток одного з них на куб другого був найбільшим?

505. Число 18 подайте у вигляді суми двох невід'ємних доданків так, щоб добуток одного з них на квадрат другого був найбільшим?

506. Площа прямокутника дорівнює 16 см^2. Якої довжини мають бути його сторони, щоб периметр прямокутника був найменшим?

507. Площа прямокутного трикутника дорівнює 18 см^2. Якої довжини мають бути його катети, щорб їхня сума була найменшою?

508. Знайти найбільше та найменше значення функції $f(x)=x^3-2x|x-2|$ на відрізку $[0;3]$.

509. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = f(x)$ на вказаному проміжку.

1) $y(x) = 3x^2 - x^3$; $[-1; 3]$; 2) $f(x) = 3^{x^2+2x-1}$; $[-2; 0]$;

3) $f(x) = e^{2x} + e^{-2x}$; $[-2; 1]$; 4) $f(x) = \sin 2x - x$; $[0; \pi]$;

5) $f(x)=2x^3-3x^2-12x-1$ на $\left[-2;\dfrac{5}{2}\right]$; 6) $f(x)=\sin^2 x;[0;2\pi]$.

510. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = 5x+\dfrac{4}{x^2}$ на відрізку $[1; 3]$.

Життєва математика

511. Для скління музейних вітрин треба замовити 28 однакових скляних прямокутників, площа кожного з яких дорівнює 0,25 м^2. Замовлення можна зробити в одній з трьох фірм. У таблиці наведено ціни на скло і на різання скла. Скільки буде коштувати найдешевше замовлення?

Фірма	Ціна скла (грн за 1 м^2)	Різання скла (грн за одне скло)	Додаткові умови
А	140	9	
Б	150	7	
В	160	5	Для замовлень від 1200 грн різання скла безкоштовне

Частина ІІ
ГЕОМЕТРІЯ

Розділ 5. ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН У ПРОСТОРІ

Основні поняття, аксіоми стереометрії та найпростіші наслідки з них

512. (Усно) Які з тверджень правильні:

1) будь-які дві точки завжди лежать на одній прямій;
2) будь-які три точки завжди лежать на одній прямій;
3) будь-які три точки завжди лежать в одній площині;
4) будь-які чотири точки завжди лежать в одній площині;
5) серед точок простору можна вибрати три, які не лежать в одній площині?

513. Чи однакові за змістом висловлювання: «площини α і β перетинаються» і «площини α і β мають спільну точку»?

514. Чи можуть дві різні площини мати лише:

1) одну спільну точку;
2) дві спільні точки;
3) 2011 спільних точок?

515. Чи однакові за змістом висловлювання «пряма належить площині» і «пряма і площина мають спільну точку»?

516. Скільки різних площин можна провести через:

1) дві точки;
2) три точки, що лежать на одній прямій;
3) три точки, що не лежать на одній прямій;
4) пряму?

517. Чи можуть дві прямі у просторі перетинатися більше ніж в одній точці?

518. Дано дві прямі у просторі, через які не можна провести площину. Чи перетинаються ці прямі?

519. Довести, що вершини паралелограма ABCD лежать в одній площині.

520. Дано дві прямі a і b, через які не можна провести площину. Довести, що ці прямі не перетинаються.

521. Довести, що дві прямі у просторі не можуть перетинатися більш ніж в одній точці.

522. Чи можуть дві площини мати тільки одну спільну точку?

523. Чи можуть три площини мати тільки одну спільну точку?

524. Через точку проведено три прямі, які не лежать в одній площині. Скільки різних площин можна провести через ці прямі, беручи їх попарно?

525. Побудувати та записати за допомогою символів:

1) площину α і точку A, що лежить у ній;
2) площину α і точку B, яка не лежить у ній;
3) площину β, яка проходить через пряму *a*;
4) площину γ та пряму *a*, яка не лежить у площині γ;
5) дві площини α і β, які проходять через пряму c.

526. Користуючись зображенням куба на рис. 78, вказати точки, які:
1) не належать передній грані; 2) належать верхній грані;
3)належать грані ABCD; 4) не належать грані A_1B_1BA.

527. Користуючись рис. 78, вказати:
1) спільні точки верхньої і передньої граней;
2) пряму перетину площин задньої і нижньої граней;
3) спільні точки площин граней ABB_1A_1, і $A_1B_1C_1D_1$;
4) пряму перетину площин граней $A_1B_1C_1D_1$ і BB_1C_1C.

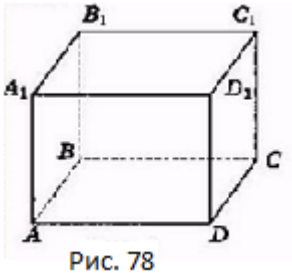


Рис. 78

528. Користуючись рис. 78, вказати, яку площину визначають прямі:
1) AB і AD; 2) BC і CC_1; 3) DC і CC_1; 4) A_1B_1 і B_1A.

529. Користуючись зображенням куба на рис. 78, довести, що можна провести площину через прямі:
1) AC і CC_1; 2) AD і DC_1.

530. Щоб поверхня розпилу чотирикутної балки (рис. 79) була плоскою, столяр зробив так; позначив на ребрі балки точку A і провів від неї в потрібному напрямі два відрізки AB і AC у суміжних гранях балки, потім направив пилку по намічених відрізках. Поясніть, винна утворитися плоска поверхня розпилу.

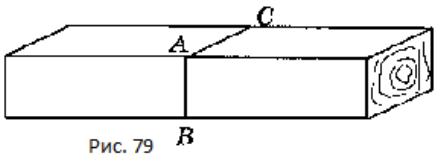


Рис. 79

531. Столяр за допомогою двох ниток перевіряє, чи лежать кінці чотирьох ніжок стільця в одній площині. Як він це робить?

532. Дано зображення куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Якій площині належать:
1) пряма AB і точка D; 2) пряма BB_1 і точка C_1; 3) пряма AC і точка C_1 ?

533. Довести, що через пряму і точку, яка лежить на прямій, можна провести площину.

534. Пряма a лежить в площині α. Довести, що через пряму *a* можна провести площину β, відмінну від α .

535. Дано десять точок, які не лежать в одній площині. Чи можуть дев'ять із них лежати на прямій? Відповідь обґрунтувати.

536. Чи можна через точку O перетину двох даних прямих *a* і *b* провести третю пряму c, яка не лежить з прямими *a* і *b* в одній площині. Відповідь об- ґрунтувати.

537. Довести, якщо вершини трикутника ABC належать деякій площині α, то трикутник ABC лежить в цій площині.

538. Довести, що чотирикутник ABCD лежить в одній площині, якщо його

діагоналі AC і BD перетинаються.

539. Довести, що чотирикутник ABCD – плоский, якщо продовження двох протилежних сторін AB і CD перетинаються.

540. Як перевірити якість виготовлення лінійки за допомогою добре відшліфованої плити?

541. Пряма a не лежить у площині a. Чи може ця пряма мати з площиною:

1) одну спільну точку; 2) дві спільні точки; 3) 2012 спільних точок?

542. Відомо, що через три дані точки можна провести принаймні дві площини.

1) Яке взаємне розміщення цих точок?
2) Скільки площин можна провести через ці три точки?

543. Відомо, що через дані пряму і точку можна провести принаймні дві площини.

1) Яке взаємне розміщення прямої і точки?
2) Скільки площин можна провести через цю пряму і цю точку?

544. *Точки A, B, C і D не лежать в одній площині. Чи можуть деякі три з них лежати на одній прямій?

545. На рис. 83 дано куб $ABCDA_1B_lC_lD_1$. Знайти пряму перетину площин:

1) ABA_1, і ABC; 2) DD_1C_1 і ABD; 3) $A_1B_lD_1$ і DCC_1.

546. Чи належить точка T площині SBC (рис. 81)? Чи належить точка T площині SAB (рис. 81)?

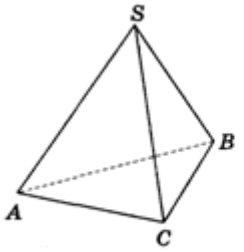


Рис. 80

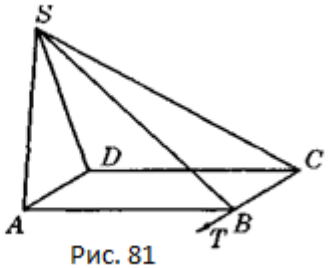


Рис. 81

547. *Площина а проходить через точки A, B і C. Площина β також проходить через точки A, B і C.

1) Чи можна зробити висновок, що площини a і β співпадають?
2) В якому випадку можна зробити висновок, що a і β співпадають?

548. Плоский чотирикутник $ABCD$ і трикутник ABP не лежать в одній площині (рис. 82). По якій прямій перетинаються площини APC і APB?

549. На рис. 83 зображено куб. Побудувати пряму перетину площин AKC і BB_1D_1D.

550. Через середини сторін трикутника ABC проведено площину a. Чи співпадає a з площиною трикутника ABC?

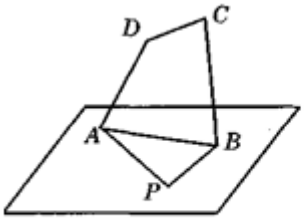


Рис. 82

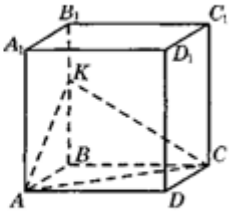


Рис. 83

551. Середини трьох сторін трикутника належать площині α. Довести, що вершини трикутника належать площині α.

552. Площини α і β перетинаються по прямій с. Довести, що існує площина:

1) яка містить пряму с і відмінна від площин α і β;
2) яка перетинає пряму с та площини α і β .

553. Дві вершини трикутника належать деякій площині. Чи належить цій площині третя вершина, якщо відомо, що цій площині належить:

1) центр кола, вписаного в трикутник;
2) центр кола, описаного навколо трикутника?

554. Три прямі a, b, c попарно перетинаються і перетинають площину α, в точках A, B, C (рис. 84). Чи є помилка на рисунку? Якщо помилка є, то зробіть правильний рисунок.

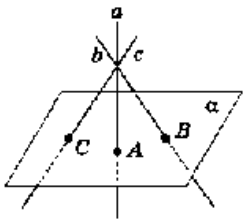


Рис. 84

555. Три вершини паралелограма лежать у площині a. Чи можна стверджувати, що і четверта вершина лежить у цій площині?

556. Чому табурет, що має чотири ніжки, коли стоїть на рівній підлозі, іноді хитається, а табурет із трьома ніжками завжди стоїть стійко?

557. (Задача-жарт). О 8 годині з поверхні стола злетіли три мухи. Через який час вони знову будуть перебувати в одній площині?

558. Чи належить точка K площині трапеції $ABCD$ (рис. 85), якщо точка M прямої KL належить відрізку AB, а точка L належить відрізку DC?

559. *Чи однаковий зміст мають твердження: «прямі a і b лежать в різних площинах» і «прямі a і b не лежать в одній площині»?

560. *Вершина A опуклого чотирикутника $ABCD$ лежить у площині a, а вершини B, C і D не лежать у цій площині (рис. 86). Сторона CD продовжена до перетину з площиною a в точці N, а сторона CB — до еретину з площиною a в точці M. Чи правильно виконано рис. 86?

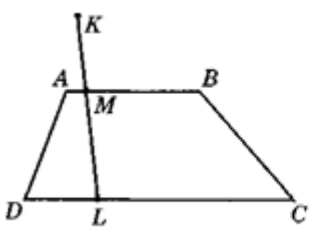


Рис. 85

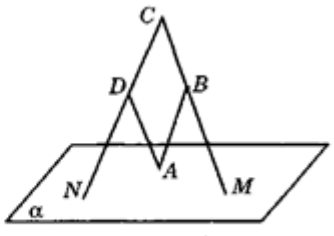


Рис. 86

Життєва математика



561. Відношення висоти до ширини екрана монітора дорівнює 9 :16. Діагональ екрана монітора дорівнює 40 дюймів. Знайдіть ширину екрана в сантиметрах?

Перерізи многогранників

562. Побудувати діагональний переріз куба $ABCDA_1B_1C_lD_v$

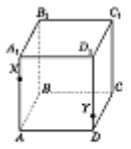
563. Побудувати діагональний переріз чотирикутної піраміди *TABCD*, що проходить через бічні ребра *TB* і *TD*.

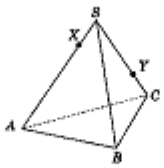
564. Побудувати переріз прямокутного паралелепіпеда $KLMNK_lL_1M_lN_l$ площиною, що проходить через точки *A, B і C* — середини ребер KL, LM і LL_1.

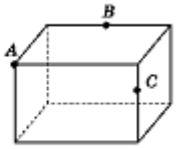
565. У трикутній піраміді SABC точка M – середина ребра AB, точки P і N лежать відповідно на ребрах SA і SC, причому AP : AS = 1 : 3, а SN = $\frac{1}{2}$NC. Побудувати переріз піраміди площиною, яка проходить через точки M, N, P.

566. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ побудувати переріз площиною, яка проходить через вершину B_1 і точки M на ребрі AA_1 і N на ребрі CC_1, якщо MA = $\frac{1}{3}AA_1$, CN = $\frac{1}{3}$ CC_1.

567. Дано зображення куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 87). Побудувати точку перетину прямої XY з площиною ABC та лінію перетину площини XYC і ADC.

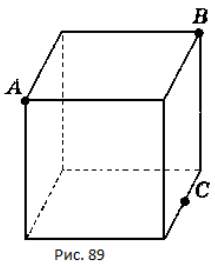

Рис. 87


Рис. 88


Рис. 90

568. Дано зображення тетраедра SABC (рис. 88). Побудувати точку перетину прямої XY з площиною ABC та лінію перетину площини XYB і ABC.

569. Дано зображення куба (рис. 89). Побудувати переріз куба площиною, яка проходить через точки A, B, C.


Рис. 89

570. Дано зображення прямокутного паралелепіпеда (рис. 90). Побудувати переріз прямокутного паралелепіпеда площиною, яка проходить через точки A, B, C.

571. Дано зображення тетраедра (рис. 91). Побудувати переріз тетраедра площиною, яка проходить через точки A, B, C.

572. Дано зображення трикутної піраміди (рис. 92). Побудувати переріз піраміди площиною, яка проходить через пряму AB і точку C.

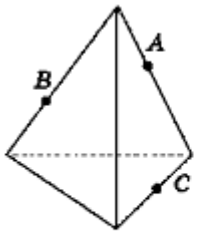


Рис. 91

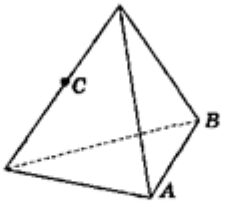


Рис. 92

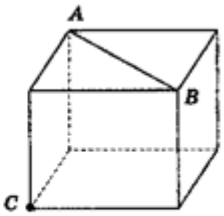


Рис. 93

573. Дано зображення куба (рис. 93). Побудувати переріз куба площиною, яка проходить через пряму AB і точку C.

574. У трикутній піраміді SABC всі ребра дорівнюють 10 см. Побудуйвати переріз піраміди площиною, яка проходить через ребро AS і точку M — середину ребра BC. Знайти периметр побудованого перерізу.

575. Побудувати переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через діагональ BD верхньої основи і точку M — середину ребра AA_1. Обчислити периметр перерізу, якщо ребро куба дорівнює 10 см.

576. Три точки в просторі розміщені так, що через них можна провести не менше 100 площин. Що можна сказати про розміщення цих точок?

577. Рівно о 12 годині з навчального полігону було запущено три ракети. О котрій годині центри мас цих ракет будуть знаходитися в одній площині?

578. Щоб надати більшої стійкості вимірювальним приладам, їх часто встановлюють на триногах. На якому теоретичному факті базуються такі дії?

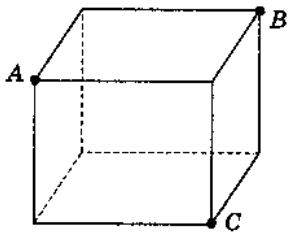


Рис. 94

579. Задано три точки A, B, C. Скільки площин можна провести через них, якщо:.

1) AB = 3 см, BC = 4 см, AC = 5 см;

2) AB = 3 см, BC = 4 ом, AC = 7 см?

580. Дано зображення куба (рис. 94). Побудувати переріз куба площиною, яка проходить через точки A, B, C.

581. Дано зображення трикутної піраміди (рис. 95). Побудувати переріз піраміди площиною, яка проходить через точки A, B, C.

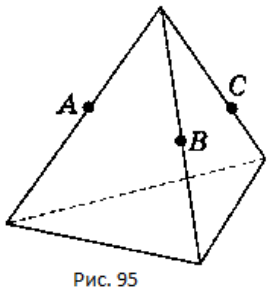


Рис. 95

582. Через середини трьох ребер куба, які виходять із однієї вершини проведено переріз. Обчислити периметр і площу перерізу, якщо ребро куба дорівнює $6\sqrt{2}$ см.

583. У трикутній піраміді, кожне ребро якої дорівнює 4 см, побудовано переріз площиною, яка проходить через середини трьох ребер, що виходять із однієї вершини. Обчислити периметр і площу утвореного перерізу.

584. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M лежить на ребрі A_1B_1, причому $MB_1=\frac{1}{3}A_1B_1$. Побудувати точку N перетину прямої AM з площиною грані BB_1C_1C та знайдіть довжину відрізка MN, якщо ребро куба дорівнює 12 см.

585. Довжини трьох ребер прямокутного паралелепіпеда, що виходять з однієї вершини, дорівнюють 6, 6 і 8 см. Побудувати переріз паралелепіпеда площиною, яка проходить через середини цих ребер, і знайдіть його периметр.

586. *RABC* — трикутна піраміда, *AB* = 4 см; *BC* = 8 см; *AC* = 6 см.

1) Побудувати переріз, що проходить через середини бічних ребер *RA, RB* і *RC.*

2) Знайти периметр утвореного перерізу.

Взаємне розміщення прямих у просторі

587. Прямі *a* і *b* — не мимобіжні. Чи можна через ці прямі провести площину?

588. На рис. 96 зображено куб. Точки *M* і *N* належать відповідно ребрам AA_1 і *AB*. Яким є взаємне розміщення прямих:

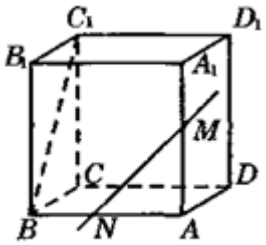


Рис. 96

1) *AB і MN;* 2) BB_1 і *MN;*

3) A_1D_1 *і MN;* 4) C_1A_1 і *AB;*

5) C_1A_1 *і* BB_1*;* 6) C_1A_1 і A_1D_1;

7) C_1B *і* BB_1*;* 8) C_1B_1 *і* BB_1; 9) C_1B *і* A_1D_1*?*

589. Чи можна стверджувати, що пряма, яка перетинає одну з двох паралельних прямих, перетинає і другу?

590. Пряма *MN* не лежить у площині прямокутника *ABCD* (рис. 97). Відомо, що прямі *MN* і *AD* — паралельні. Яке взаємне розміщення прямих *MN* і *BC?*

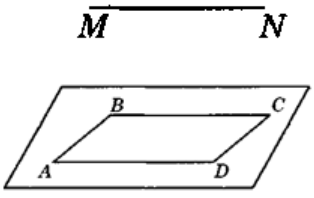


Рис. 97

591. Різні випадки розташування двох прямих у просторі продемонструйте на предметах оточення.

592. Дано зображення куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 98).

1) Чи перетинаються прямі AA_1 і BB_1? A_1B_1 і D_1C_1? Як називаються ці прямі?

2) Чи перетинаються прямі AD і BB_1? AB і DD_1? Як називаються ці прямі?

3) Чи можна провести площину через прямі AD і DB_1? A_1D_1 і C_1D_1? AD і BB_1? AA_1 і DB_1 ? AA_1 і DD_1 ?

593. Як розташовані осі залізничних вагонів між собою; відносно рейок?

594. Як треба розуміти, що прямі *a* і *b* у просторі не паралельні?

595. Що можна сказати про прямі *a* і *b,* якщо відомо, що вони не мимобіжні?

596. Прямі AB і *CD* паралельні. Чи можуть бути мимобіжними прямі AC і *BD?*

А перетинатися?

597. Прямі *AB* і *CD* мимобіжні. Чи можуть бути прямі *AC і BD* паралельними? А перетинатися?

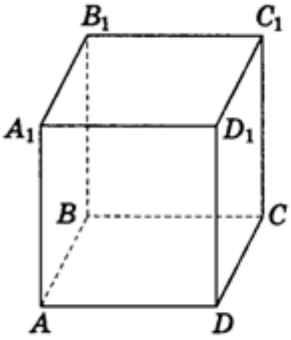


Рис. 98

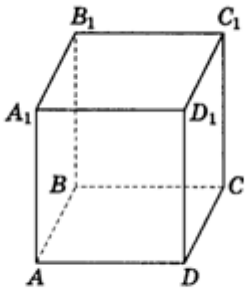


Рис. 99

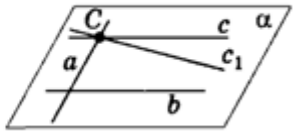


Рис. 100

598. *K, P,T, M* — середини ребер *AB, AC, CD, DB* тетраедра *DABC.* Знайдіть периметр чотирикутника *KPTM,* якщо *AD* = 6 см, *BC* = 8 см.

599. Користуючись зображенням куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 99), вкажіть пряму, яка проходить через точку A_1 і паралельна прямій:1)AD;2) AB; 3) AC.

600. Скільки прямих, паралельних даній прямій *a*, можна провести через точку A, що належить прямій *a*?

601. Нехай *c* — пряма, яка паралельна прямій *b* і перетинає пряму *a* (рис. 100). Проведемо через прямі *a* і *b* площину α . Через точку C — точку перетину прямих *a* і *c* — проведемо пряму c_1, паралельну прямій *b*. За теоремою 2.1 випливає, що пряма *c*, збігається з прямою *c*, отже, пряма с лежить у площині α . Таким чином, будь-яка пряма *c*, яка паралельна прямій *b* і перетинає пряму *a*, лежить у площині *a*.

602. Довести, що паралельні прямі, які перетинають дану пряму, лежать в одній площині.

603. Дано зображення куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Довести, що;

1) $AA_1 \parallel CC_1$; 2) $AB \parallel C_1D_1$; 3) $AC \parallel A_1C_1$.

604. Чи правильне твердження: якщо прямі *b* і *c* не паралельні одній і тій самій прямій a, то *b* і *c* не паралельні між собою?

605. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — паралелепіпед. Довести, що площина ACC_1 проходить через точку A,.

606. Прямі *a* і *b* паралельні, а прямі *b* і *c* не паралельні. Довести, що прямі *a* і *c* не паралельні.

607. Трикутник ABC і трапеція ABED (AB — основа) не лежать в одній площині. Точки M і N — середини сторін AC і BC відповідно. Довести, що MN || DE .

608. Точки K, L, M, N — середини ребер AB, AC, CD, DB тетраедра, всі ребра якого рівні. Знайти довжину ребра тетраедра, якщо периметр утвореного чотирикутника KLMN дорівнює 4*a* (рис. 101).

609. Дано в трикутнику піраміду SABC (рис. 102). Довести, що вказані прямі мимобіжні:

1) *SC* і AB; 2) SB і AC; 3) AS і *BC*.

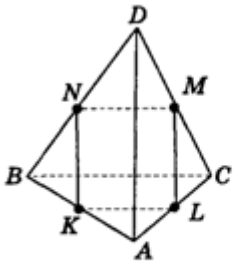


Рис. 101

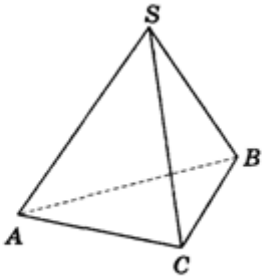


Рис. 102

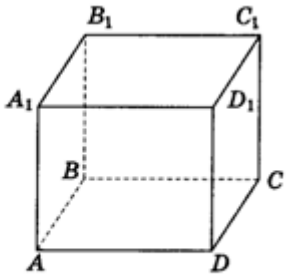


Рис. 103

610. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 103). Довести, що вказані прямі мимобіжні.

1) AB і CC_1; 2) AC_1 і *DC;* 3) AC і B_1D_1; 4) AC_1 і BA_1.

611. Трикутники ABC і *ABD* не лежать в одній площині. Довести, що прямі *AB* і *CD* не лежать в одній площині.

612. Пряма *c* перетинає пряму *a* і не перетинає пряму *b,* паралельну прямій *a.* Довести, що *b* і *c* — мимобіжні прямі.

613. Точка *S* не лежить у площині трикутника *ABC,* точки *M, N і P* — середини відрізків *SA, SB* і SC відповідно, точка *K* лежить на відрізку *BN.* Яке взаємне положення прямих: 1) NS і AB; 2) PK і BC; 3) MN і AB; 4) MP і AC; 5) KN і AC; 6) KN і AC; 7) MS і BC? Відповідь обґрунтувати.

614. Через точку A, що не лежить на прямій *a,* проведено дві прямі, які не мають спільних точок з прямою *a.* Довести, що хоча б одна з прямих і пряма *a* будуть мимобіжними прямими.

615. Через вершину A ромба ABCD проведена пряма *a*, паралельна діагоналі *BD,* а через вершину C — пряма *b,* яка не лежить в площині ромба. Довести, що: 1) прямі *a* і *CD* перетинаються; 2) прямі *a* і *b* — мимобіжні прямі.

616. Точка C ділить відрізок AB у відношенні AC **:** CB = *m : n*. Паралельні прямі, які проходять через точки A, C, B, перетинають деяку площину в точках A_1, C_1, B_1. Знайти відношення A_1B_1 **:** A_1C_1, якщо відомо, що відрізок AB не перетинає даної площини.

617. Через вершину *D* паралелограма *ABCD* проведено площину, яка не перетинає його, а через точки *A, B, C* — паралельні прямі, які перетинають цю площину в точках A_1, B_1, C_1 відповідно. Знайти BB_1, якщо $AA_1 = a$, $CC_1 = c$.

618. Нехай *O* — точка перетину діагоналей паралелограма *ABCD,* а *α* — площина, яка перетинає паралелограм. Через точки *A, B, C, D, O* проведено

паралельні прямі, які перетинають площину α в точках A_1, B_1, C_1 D_1, O_1 відповідно. Довести, що:

1) $AA_1 + BB_1 + CC_1 + DD_1 = 4 \cdot OO_1$; 2) $AA_1 + CC_1 = BB_1 + DD_1$.

619. Точка M не лежить у площині трикутника ABC (рис. 104). Точки K, P, E, F — середини відрізків MA, AB, MC, BC. Довести, що прямі KE і PF— паралельні.

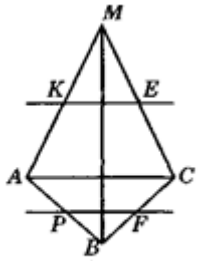


Рис. 104

620. Прямі a і b перетинаються. Як можуть бути розташовані прямі b і c, якщо прямі a і c:

1) паралельні; 2) перетинаються; 3) мимобіжні?

621. Прямі a і b — паралельні. Як можуть бути розташовані прямі b і c, якщо прямі a і c:

1) паралельні; 2) перетинаються; 3) мимобіжні?

622. Прямі o і b — мимобіжні. Як можуть бути розташовані прямі b і c, якщо прямі a і c:

1) паралельні; 2) перетинаються; 3) мимобіжні?

623. Чи правильне твердження: «Якщо прямі лежать у різних площинах і не перетинаються, то вони мимобіжні»?

624. Чи перетинаються прямі AM *і* BD (рис. 105), якщо точка D не лежить у площині трикутника ABC?

625. *На рис. 106 зображено куб і три прямі MN, B_1C_1 і KL, що перетинаються в точці P. Чи правильно виконаний рисунок?

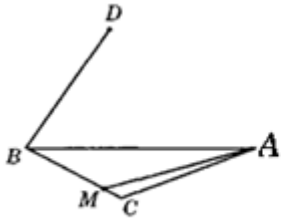


Рис. 105

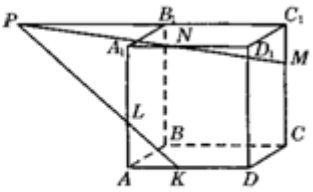


Рис. 106

626. Дано трикутник ABC і площину α , яка не перетинає його. Через вершини трикутника ABC і точку M — середину медіани AD цього трикутника — проведені паралельні прямі, які перетинають площину α в точках A_1, B_1, C_1 і M_1 відповідно. Знайти довжину відрізка MM_1, якщо $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $CC_1 = c$.

627. Через кінець C відрізка CD проведено площину α. Через кінець D і точку A цього відрізка проведено паралельні прямі, що перетинають площину α в точках D_1 і A_1відповідно. Знайдіть довжину відрізка AA_1, якщо DD_1=12 см і $CA:AD = 3:1$.

628. Через кінець M відрізка MN проведено площину β. Через кінець N і точку B цього відрізка проведено паралельні прямі, що перетинають площину β в точках N_1 і B_1відповідно. Знайдіть довжину відрізка NN_1, якщо BB_1=15 см і $MB:BN = 3:2$.

629. На малюнку 107 прямі *a*, *b* і *c* попарно перетинаються і перетинають площину α відповідно в точках *A, B* і *C*. Чи є помилки на малюнку? Якщо так, виконайте малюнок правильно.

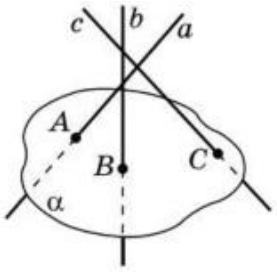


Рис. 107

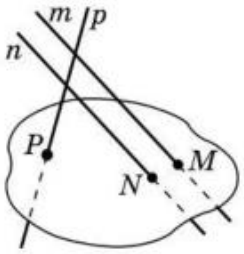


Рис. 108

630. На малюнку 108 прямі *m* і *n* паралельні, а пряма *p* перетинає кожну з прямих *m* і *n*. Прямі *m*, *n* і *p* перетинають площину β відповідно в точках *M*, *N* і *P*. Чи є помилки на малюнку? Якщо так, виконайте малюнок правильно.

631. Точка *M* не лежить у площині квадрата *ABCD, AB* = 3 см? Точки A_1, B_1, C_1, D_1- середини відрізків *MA, MB, MC* і *MD* відповідно. Знайдіть P_{A_1,B_1,C_1,D_1}.

632. *ABCD* – паралелограм, P_{ABCD}= 40 см, точка *N* не належить площині паралелограма. Точки A_1, B_1, C_1, D_1- середини відрізків *NA, NB, NC* і *ND* відповідно. Знайдіть P_{A_1,B_1,C_1,D_1}.

Життєва математика



633. У центрі Києвав у 2008 році біля Майдану Незалежності зробили найбільший на той час у світі квітковий годинник. Годинниковий механізм на тлі квіткового панно розмістився на схилі біля Жовтневого палацу. Діаметр годинника – 19,5 м, діаметр циферблата – 16,5 м, а довжина стрілок – 4 м і 7 м. Знайдіть довжини кіл, які описують кінці годинної та хвилинної стрілок протягом однієї години. (Для спрощення обчислень прийміть π ≈ 3)?

Паралельне проектування і його властивості. Зображення фігур у стереометрії

634. Чи можуть нерівні відрізки мати рівні паралельні проекції?

635. Чи можуть рівні відрізки мати нерівні паралельні проекції?

636. Чи може довжина паралельної проекції відрізка бути більшою від довжини цього відрізка?

637. Які геометричні фігури можуть бути паралельними проекціями:

1) точки; 2) відрізка; 3) променя; 4) прямої;
5) двох паралельних відрізків; 6) двох паралельних прямих;
7) двох прямих, що перетинаються; 8) двох мимобіжних прямих;
8) трикутника; 10) паралелограма?

638. Відрізок *AB* паралельно проектується на площину *a*. Проекція відрізка дорівнює самому відрізку. Як розміщені пряма *AB* і площина *a*? Скільки випадків слід розглянути?

а. При якому положенні відрізка відносно площини проекції його проекція: 1) дорівнює самому відрізку; 2) є точка?

639. Відрізок проектується паралельно на площину. Як проектується середина відрізка на цю площину?

640. Чи можуть непаралельні прямі проектуватися в паралельні прямі? Навести приклади.

641. Площина фігури не паралельна напряму проектування. В яку фігуру проектується: 1) трикутник; 2) паралелограм?

642. Чи може проекція відрізка бути більше відрізка, який проектують?

643. Як розташовані точки A і B відносно площини CDD_1C_1 (рис. 119)?

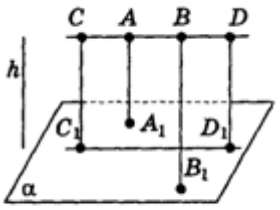


Рис. 119

644. Відрізок A_1B_1 — паралельна проекція відрізка AB на площину α (рис. 120). Точка *C* лежить на відрізку AB. Вказати, які з наведених тверджень правильні, а які — неправильні:

1) проекція точки C на площину α не належить відрізку A_1B_1;
2) відрізки AB і A_1B_1 не лежать в одній площині;
3) якщо AC : BC = 2 : 3, то $A_1C_1 : C_1B_1 = 2 : 3$;
4) якщо AC = CB, то $A_1C_1 = 2C_1B_1$;
5) якщо AC = 3 см, AB =12 см, то $A_1C_1 : A_1B_1 = 1 : 4$.

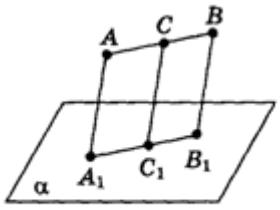


Рис. 120

645. Паралелограм *ABCD* не має спільних точок з площиною α. Через точки A, *B, C, D* проведено паралельні прямі, які перетинають площину *a* відповідно в точках A_1, B_1, C_1, D_1

1) Що можна сказати про площини ABB_1A_1 і CDD_1C_1 ?
2) Визначте вид чотирикутника $A_1B_1C_1D_1$.

646. Дано паралельні площини α і β. Через точку S, яка не належить жодній із них, проведено прямі *a* і *b*, які перетинають площину α в точках A_1 і B_1, а площину β — в точках A_2 і B_2, причому $SA_1 = 8$ см, $A_1A_2 = 12$ см, $A_2B_2 = 25$ см. Знайти A_1B_1.

647. Прямі *a* і *b* перетинають три дані паралельні площини в точках A_1, A_2, A_3 і B_1, B_2, B_3 відповідно (точка A_2 лежить між точками A_1 і A_3, а точка B_2 — між

точками B_1 і B_3). Відомо, що $A_1A_2 = 12$ см, $B_2B_3 = 27$ см і $A_2A_3 = B_1B_2$. Знайти довжину відрізків A_1A_3 і B_1B_3.

648. Три паралельні площини перетинають дві мимобіжні прямі в точках A_1, A_2, A_3 і B_1, B_2, B_3 відповідно (точка A_2 лежить між точками A_1 і A_3, точка B_2 — між точками B_1 і B_3). Відомо, що $A_2A_3 = 8$ см, $B_1B_2 = 18$ см і $A_1A_2 + B_2B_3 = 24$ см. Знайти довжини відрізків A_1A_3 і B_1B_3.

649. У просторі дано пряму і точку, яка їй не належить. Чи може паралельна проекція даної точки належати проекції даної прямої?

650. Проекції прямих a і b на площину паралельні. Як розміщені прямі a і b? Скільки випадків слід розглянути?

651. Чи можна при паралельному проектуванні трапеції отримати:

1) точку; 2) відрізок; 3) паралелограм; 4) трапецію?

652. Паралелограм $ABCD$ є зображенням квадрата (рис. 121). Як побудувати зображення перпендикулярів, проведених з точки O до сторін квадрата?

653. Паралелограм $ABCD$ є зображенням ромба із кутом B, що дорівнює 60° (рис. 121). Як побудувати зображення висоти ромба, проведеної з вершини A?

654. *Чи можна при паралельному проектуванні паралелограма отримати чотирикутник, два кути якого дорівнюють 35° і 140°?

655. У якому випадку трикутник проектується:

1) у відрізок; 2) у трикутник, що йому дорівнює?

656. Трикутник ABC — зображення прямокутного трикутника з прямим кутом при вершині C (рис. 122). Як побудувати зображення перпендикулярів, опущених з точки M на катети AC і BC?

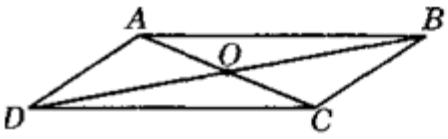


Рис. 121

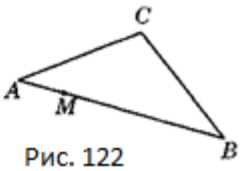


Рис. 122

657. *Дано паралельну проекцію кола з центром O (рис. 123). Побудувати проекцію діаметра, перпендикулярного до діаметра AB.

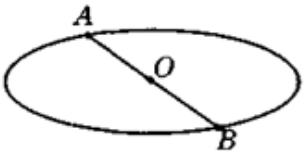


Рис. 123

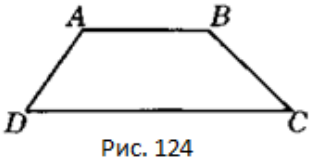
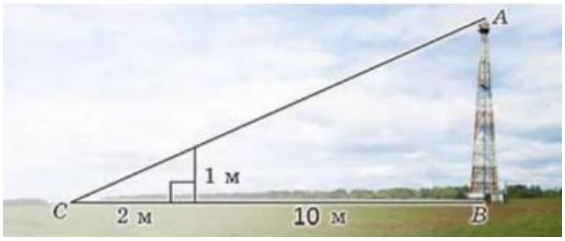


Рис. 124

658. *Дано паралельну проекцію рівнобічної трапеції $ABCD$ (рис. 124). Побудувати зображення висот, проведених з вершин тупих кутів A і B.

Життєва математика

659. Використовуючи дані, наведені на малюнку, знайдіть висоту щогли AB.



Розміщення прямої та площини у просторі.
Паралельність прямої та площини

660. Скільки прямих, паралельних даній площині, можна провести через точку, що не лежить у цій площині?

661. Чи можливо, щоб пряма a була не паралельна площині a, але у площині a була б пряма, паралельна до прямої a?

662. Пряма a паралельна до площини a. Чи існує у площині α пряма, не паралельна до прямої a?

663. Прямі a і b — паралельні. Як можуть бути розміщені пряма b і площина α, якщо:

1) a і a — паралельні; 2) a і a перетинаються;
3) пряма a лежить у площині a?

664. Прямі a і b перетинаються. Як можуть бути розміщені пряма b і площина α, якщо:

1) a і α — паралельні; 2) a і α перетинаються;
3) пряма a лежить у площині a?

665. Прямі a і b — мимобіжні. Як можуть бути розміщені пряма b і площина α, якщо:

1) a і α — паралельні; 2) a і α перетинаються;
3) пряма a лежить у площині a?

666. Пряма a лежить у площині α. Як можуть бути розташовані прямі a і b, якщо:

1) a і b — паралельні; 2) a і b перетинаються;
3) b лежить у площині α?

667. Пряма a перетинає площину a. Як можуть бути розташовані прямі a і b, якщо:

1) a і b — паралельні; 2) a і b перетинаються;
3) b лежить у площині a?

668. Пряма a паралельна площині α. Як можуть бути розташовані прямі a і b, якщо:

1) a і b — паралельні; 2) a і b перетинаються;
3) b лежить у площині a?

669. Пряма a перетинає площину a. Яким може бути взаємне розміщення площин a і β, якщо:

1) a належить β; 2) a перетинає β; 3) a паралельна до β?

670. Пряма a належить площині α. Яким може бути взаємне розміщення площин a і β, якщо:

1) a належить β; 2) a перетинає β; 3) a паралельна до β?

671. Дано зображення куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Довести, що:

1) пряма AB паралельна площині DCC_1;
2) пряма AB паралельна площині DCB_1.

672. У трикутній піраміді $SABC$ точки M і N — середини ребер SA і SB відповідно. Довести, що $MN \parallel (ABC)$.

673. Дано площину α і поза нею точку A. Провести через точку A пряму, паралельну даній площині α .

674. Дано пряму a і точку A, яка не лежить на ній. Провести площину, яка проходить через точку А і паралельна прямій a.

675. Дано паралельні прямі a і b. Провести через пряму a площину, яка паралельна прямій b.

676. Дано мимобіжні прямі a і b та точку C, яка не лежить на них. Провести через точку C площину, паралельну прямим a і b.

677. Сторона AB трикутника ABC паралельна площині α, а сторона CA і CB перетинають площину α в точках K і L відповідно.

1) Доведіть, що $\Delta CKL \sim \Delta CAB$.
2) Знайдіть KL, якщо CK=3 см, CA=7 см, AB=14 см.

678. Сторона BC трикутника ABC паралельна площині β, а сторона AB і AC перетинають площину β в точках M і N відповідно.

1) Доведіть, що $\Delta AMN \sim \Delta ABC$.
2) Знайдіть BC, якщо MN =2 см, AB=9 см, AM=3 см.

679. Довести, що всі прямі, які перетинають одну із мимобіжних прямих і паралельні другій, лежать в одній площині.

680. Площина α, яка паралельна основам AB і CD трапеції $ABCD$, перетинає бічні сторони AD і BC в точках M і N відповідно. Знайдіть AB, якщо M – середина AD, MN = 6 см, DC = 4 см.

681. Площина β, яка паралельна основам AD і BC трапеції $ABCD$, перетинає бічні сторони AB і CD в точках K і L відповідно. Знайдіть KL, якщо K – середина AB, AD = 12 см, BC = 4 см.

682. Площина α паралельна стороні AB трикутникав ABC та перетинає сторони AC і BC у точках D і E відповідно. Знайдіть AC, якщо AD = 8 см, DE = 3 см, AB = 7 см.

683. Площина β паралельна стороні *BC* трикутникав *ABC* та перетинає сторони *AB* і *AC* у точках *M* і *N* відповідно. Знайдіть *AN*, якщо *MN* = 9 см, *BC* = 13 см, *NC* = 8 см.

684. Трапеція *ABCD* (*AB* || *CD*) лежить у площині α (рис. 107), *AB* = 12 см. Поза площиною α взяли точку S і на відрізку *SA* відмітили точку *K* таку, що *AK:KS*=3:1. Побудувати точку *X* — точку перетину площини D*KC* і відрізка SB і знайдіть довжину відрізка *KX*.

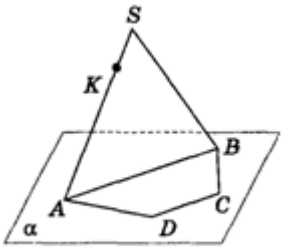


Рис. 107

Життєва математика

685. Іван та Іванка, розлучившись на перехресті, пішли по взаємно перпендикулярним дорогах. Іван зі швидкостю 3,6 км/год, Іванка – 2,7 км/год. Яка відстань (в км) буде між ними через 45 хв?



Паралельність площин

686. Навести приклади паралельних площин із оточення.

687. На моделях куба, прямокутного паралелепіпеда показати паралельні та площини, що перетинаються.

688. Користуючись зображенням прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, вказати:

1) грані, які перетинають грань *ABCD*;
2) площини, які паралельні площині *ABC*.

689. Площини α і β паралельні. Довести, що кожна пряма площини α паралельна площині β.

690. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Довести паралельність площин:

1) *ABC і* $A_1B_1C_1$; 2) AB_1D_1 *і* BDC_1.

691. Точка *B* лежить поза площиною α. Провести через точку *B* площину, паралельну площині α.

692. Довести, що площини α і β паралельні, якщо дві прямі *a* і *b*, які лежать у площині α і перетинаються, паралельні площині β.

693. Відрізки *ML* і *NK* паралельниї прямих *m* і *n* містяться між паралельними площинами α і β (рис. 107). Знайдіть:

1) *MN*, якщо *LK* = 3 см; 2) *ML*, якщо *NK* = 9 см.

694. Відрізки *ML* і *NK* паралельниї прямих *m* і *n* містяться між паралельними площинами α і β (рис. 107). Знайдіть:

1) NK, якщо ML = 10 см; 2) LK, якщо MN = 4 см.

695. Дано тетраедр $SABC$, точки M, N, P є серединами ребер SA, SB, SC. Довести, що $(MNP) \parallel (ABC)$.

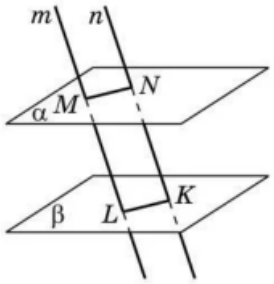


Рис. 107

696. Три відрізки A_1A_2, B_1B_2 і C_1C_2 не лежать в одній площині і мають спільну середину. Довести, що $(A_1B_1C_1) \parallel (A_2B_2C_2)$.

697. Дві сторони трикутника паралельні площині α. Довести, що і третя сторона паралельна площині α.

698. Бічні сторони трапеції паралельні площині α. Чи паралельні основи трапеції площині α?

699. Дві сторони паралелограма паралельні площині α. Чи паралельні діагоналі паралелограма площині α?

700. Площини α і β паралельні, А — точка площини α. Довести, що кожна пряма, яка проходить через точку А і паралельна площині β, лежить у площині α.

701. Пряма a паралельна одній із двох паралельних площин. Довести, що пряма a або паралельна другій площині, або лежить у ній.

702. Через пряму a, яка паралельна площині α, проведіть площину, паралельну даній площині α. Скільки площин можна провести?

703. Паралельні площини α і β перетинають сторону AB кута BAC відповідно в точках A_1 і A_2, а сторону AC цього кута — відповідно в точках B_1 і B_2. Знайти:

1) AA_2 і AB_2, якщо $A_1A_2 = 2A_1A$, $A_1A_2 = 12$ см, $AB_1 = 5$ см;

2) A_2B_2 і AA_2, якщо $A_1B_1 = 18$ см, $AA_1 = 24$ см, $AA_2 = \frac{3}{2}A_1A_2$.

704. Паралельні відрізки A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 розміщені між паралельними площинами α і β (рис. 108).

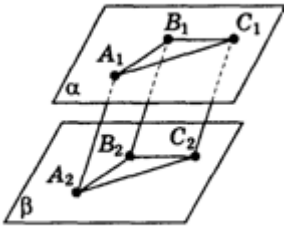


Рис. 108

1) Визначте вид чотирикутників $A_1B_1B_2A_2$, $B_1C_1C_2B_2$, $A_1C_1C_2A_2$.

2) Довести, що $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta A_2B_2C_2$.

705. Рівні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ розміщені в площинах α і β так, що прямі AA_1, BB_1, CC_1 паралельні. Чи випливає з цього, що площини α і β паралельні?

706. Прямі a і b, які мають спільну точку, перетинають три дані паралельні площини α, β, γ в точках A_1, A_2, A_3 і B_1, B_2, B_3 відповідно (точка A_2 лежить між точками A_1 і A_3, а точка B_2 — між точками B_1 і B_3) (рис. 109). Указати, які з наведених тверджень правильні, а які — неправильні:

1) прямі A_1B_2 і A_2B_3 мимобіжні;

2) пряма a і точки B_1 і B_3 обов'язково лежать в одній площині;

3) якщо $A_1A_2 = 25$ см, $B_2B_3 = 4$ см, $A_2A_3 + B_1B_2 = 20$см, то $B_1B_3 = 14$ см;

4) $A_1A_3 : A_1A_3 = B_1B_2 : B_1B_2$.

707. Три паралельні площини α, β, γ перетинають мимобіжні прямі a і b в точках A_1, A_2, A_3 і B_1, B_2, B_3 (площина β лежить між площинами α і γ) (рис. 110). Указати, які з наведених тверджень правильні, а які — неправильні:

1) прямі A_1B_2 і A_2B_3 можуть бути паралельними;

2) прямі B_1A_2 і B_2A_3 можуть перетинатися;

3) $A_1A_2 : A_2A_3 = B_1B_2 : B_2B_3$;

4) $A_1A_3 : B_1B_2 = A_1A_2 : B_1B_3$.

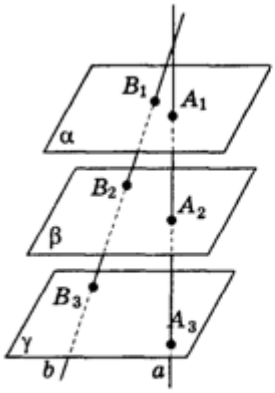


Рис. 109

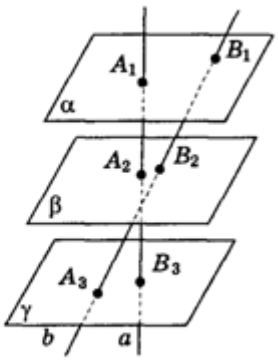


Рис. 110

708. Дано дві паралельні площини a і β і точка A, яка не лежить ні на одній із них. Скільки існує:

1) прямих, що проходять через точку A і паралельні площинам a і β;

2) площин, що проходять через точку A і паралельні площинам a і β?

709. Дано: $SK = KA$, $SN = NC$, $SM = MB$ (рис. 111). Довести, що площина KMN паралельна до площини ABC.

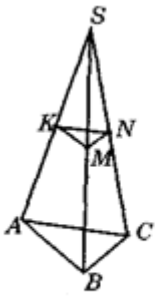


Рис. 111

710. Дві сторони трикутника паралельні до деякої площини. Чи паралельна цій площині третя сторона трикутника?

711. У кубі побудовано перерізи A_1DC_1 і ACB_1 (рис. 112). Чи паралельні площини цих перерізів?

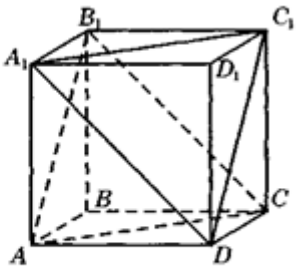


Рис. 112

712. Площини a і β — паралельні. У площині a вибрано точки C і D, а у площині β — точки C_1 і D_1,такі, що $CC_1 \| DD_1$ (рис. 113). Знайти довжини відрізків CC_1 і CD_1 якщо $DD_1 = 7$ см, $C_1D_1 = 5$ см.

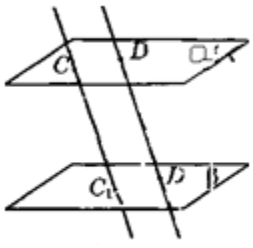


Рис. 113

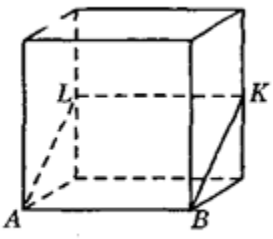


Рис. 114

713. У кубі побудовано переріз (рис. 114) Довести, що прямі AB і LK — паралельні.

714. Площини α і β паралельнеі. Через точку K, що лежить між цими площинами, проведено прямі a і b, які перетинають площину α у точках A_1 і B_1, а площину β – у точках A_2 і B_2. Знайдіть довжину відрізка A_2B_2, якщо $A_1B_1 = 10$ см, $KB_1 = 6$ см, $KB_2 = 3$ см.

715. Два промені з початком у точці А перетинають одну з двох паралельних

площин у точках $К_1$ і L_1, а другу – у точках $К_2$ і L_2. Знайдіть довжину відрізка $К_1L_1$, якщо $К_2L_2$ = 20 см, $АК_1 : АК_2$ = 4:5.

716. *ABCDA₁B₁C₁D₁* — прямокутний паралелепіпед (рис. 116). Довести, що переріз його площиною, яка проходить через точки *B, K, L*, де точка *K* — середина ребра AA_1, а точка *L* — середина ребра CC_1, є паралелограм.

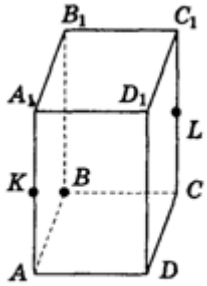


Рис. 116

717. У трикутній піраміді *SABC* провести переріз:

1) через середину ребра *AC* паралельно грані *SCB;*

2) через середину ребра SC паралельно грані *SAB*.

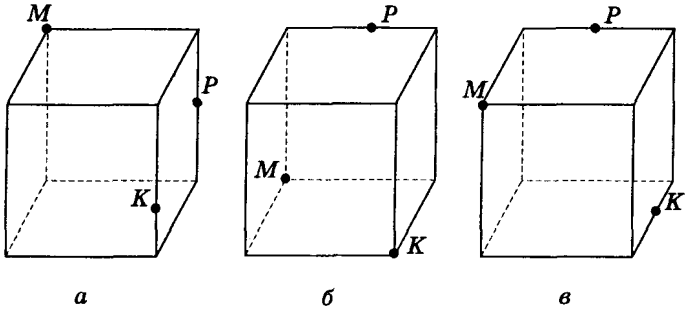


Рис. 117

718. Побудувати перерізи куба площиною, яка проходить через точки *M, K, P* (рис. 117).

719. Дано куб *ABCDA₁B₁C₁D₁*. Побудувати переріз куба площиною, яка проходить через дані точки: 1) *C₁, K, D*; б) *C₁, K, C,* де точка *K* — середина A_1B_1. З'ясувати, яка фігура утвориться в перерізі.

720. Точка *X* ділить ребро *AB* куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ у відношенні *AX : XB*=2:3. Побудувати переріз цього куба площиною, яка паралельна площині AA_1C_1 і проходить через точку *X*. Знайдіть периметр перерізу, якщо *AB = a.*

721. Довести, що коли перерізом паралелепіпеда є шестикутник, то його протилежні сторони паралельні.

722. Чи може перерізом куба бути правильний п'ятикутник?

723. Побудувати переріз куба площиною, яка проходить через точку *E* і паралельна площині *MNP* (рис. 118).

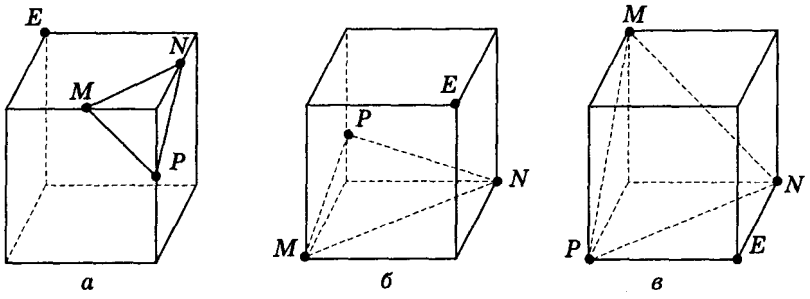


Рис. 118

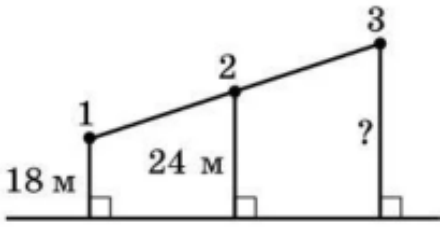
724. Побудувати прямокутний паралелепіпед *ABCDA₁B₁C₁D₁* і його переріз площиною, яка проходить через: 1) ребро CC_1 і точку перетину діагоналей грані AA_1D_1D; 2) точку перетину діагоналей грані *ABCD* і паралельно площині AB_1C_1.

725. Точка A_1 ділить ребро SA тетраедра $SABC$ у відношенні $SA_1 : A_1A = 2 : 3$. Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через точку A_1 і паралельна площині ABC. Знайти периметр і площу перерізу, якщо ABC — правильний трикутник і $AB = 10$ см.

726. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Довести, що переріз куба площиною A_1C_1K, де K — середина DC, є трапеція, а перерізи куба площинами A_1B_1K і AA_1K є паралелограмами.

Життєва математика

727. На однаковій відстані один за другим вздовж прямої встановлено три телеграфних стовпи. Перший і другий знаходяться від дороги на відстанях 18 м і 24 м. Знайдіть відстань від дороги до третього стовпа.



Розділ 6. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН У ПРОСТОРІ

Перпендикулярність прямих у просторі

728. Чи правильне твердження: «Через точку, яка лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, перпендикулярну до цієї прямої»?

729. Пряма проходить через точку кола перпендикулярно до радіуса, проведеного до цієї точки. Чи можна зробити висновок, що пряма є дотичною до кола?

730. SABC — тетраедр; <ABC = 90°; точки K, L, M — середини ребер SB, SA, SC відповідно (рис. 125). Знайти <MKL.

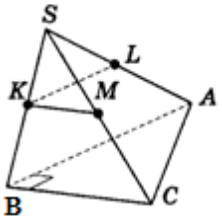


Рис. 125

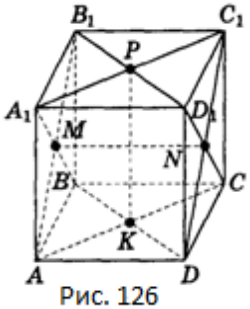


Рис. 126

731. Дано зображення куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 126). Точки M, N, P, K — точки перетину діагоналей граней ABB_1A_1, CDD_1C_1, $A_1B_1C_1D_1$ і $ABCD$ відповідно. Довести, що $MN \perp PK$.

732. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Через точку M, що належить ребру AA_1 в грані AA_1DD_1, провести пряму MN так, щоб $\angle MOD_1 = 90°$, де точка O — точка перетину прямих MN і AD_1.

733. Промені OA, $0B$, OC попарно перпендикулярні. Знайти периметр і площу трикутника ABC, якщо $OA = 0B = OC = a$.

734. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Через точку O грані A_1ADD_1 провести прямі OM і ON так, щоб $OM \parallel BC$, $ON \parallel CC_1$. Довести, що <MON = 90°.

735. Через точку O перетину діагоналей куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведіть площину α, паралельну основі $A_1B_1C_1D_1$ куба. Довести, що <MON = 90°, де точки M, N — точки перетину ребер CC_1 і BB_1 з площиною α.

736. Дано пряму a і точку A, яка не належить прямій a. Провести пряму, яка проходить через точку A і перпендикулярна до прямої a. Скільки прямих, перпендикулярних до прямої a, можна провести через точку A, яка не лежить на прямій?

737. Дано зображення куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Вказати пряму, яка перпендикулярна до прямої AA_1 і проходить через точку C.

738. Дано пряму a і точку A, яка лежить на прямій a. Провести пряму, яка проходить через точку A і перпендикулярна до прямої a. Скільки прямих,

перпендикулярних до прямої *a*, можна провести через точку A, яка лежить на прямій *a*?

739. Дано зображення куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Вказати прямі, які перпендикулярні до прямої AA_1 і проходять через точку A.

740. Діагоналі двох квадратів відповідно паралельні. Довести, що відповідні сторони цих квадратів паралельні.

741. Діагоналі двох прямокутників відповідно паралельні. Чи паралельні відповідні сторони цих прямокутників?

742. ABCD — ромб, його сторони відповідно паралельні до сторін чотирикутника $A_1B_1C_1D_1$. Чи перпендикулярні діагоналі чотирикутника $A_1B_1C_1D_1$?

743. Сторони двох рівнобічних трапецій відповідно паралельні. Діагоналі однієї трапеції взаємно перпендикулярні. Чи перпендикулярні діагоналі другої трапеції?

744. Пряма *a* перпендикулярна до прямої *b*. Яким може бути взаємне розміщення прямих *a* і c, якщо прямі *b* і c:

1) перпендикулярні; 2) паралельні; 3) мимобіжні;
4) перетинаються, але не перпендикулярні?

745. *Точка *M* лежить на ребрі AA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 127). Провести в грані AA_1D_1D) пряму *MN* перпендикулярну до AD_1.

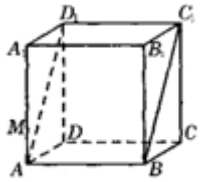


Рис. 127

746. Дано пряму *a* і точку *M*. Скільки існує прямих, які проходять через *M*, перетинають *a* і перпендикулярні до неї? Скільки випадків слід розглянути?

Перпендикулярність прямої та площини

747. Назвати у навколишньому оточенні моделі прямих і площин, які перпендикулярні між собою.

748. Чи правильні твердження?

1) Якщо пряма не перпендикулярна до площини, то вона не перпендикулярна до жодної прямої цієї площини.

2) Пряма перпендикулярна до двох прямих площин, перпендикулярна до цієї площини.

3) Якщо пряма перпендикулярна до площини, то в цій площині існує безліч прямих, перпендикулярних до даної прямої.

749. Пряма *a* перпендикулярна до площини *a*. Як можуть бути розміщені площина *a* і пряма *b*, якщо:

1) *a* і *b* — мимобіжні; 2) *a* і *b* — перпендикулярні;
3) *a* і *b* перетинаються, але не перпендикулярні;
4) *a* і *b* — паралельні?

750. Пряма *AS* перпендикулярна до площини квадрата *ABCD* (рис.127.1). Знайдіть *SC*, якщо *AB* = 3 см, *SA* = 4 см.

751. Пряма *AS* перпендикулярна до площини квадрата *ABCD* (рис.127.1). Знайдіть *AB,* якщо *SC* = 10 см, *SA* = 6 см.

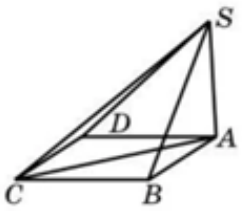


Рис. 127.1

752. Прямі *DA*, *DB* і *DC* попарно перпендикулярні (рис. 127.2). Знайдіть довжину відрізка АВ, якщо:

1) *CD* = 6 см, *BC* = 14 см, *AD* = 3 см;
2) *AC* = *a*, *BC* = *b*, *AD* = *c*.

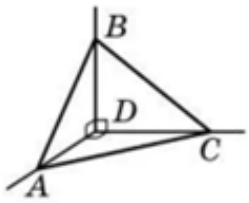


Рис. 127.2

753. Пряма *a* перпендикулярна до площини а. Як можуть бути розміщені прямі *a* і *b*, якщо:

1) *b* належить *a*; 2) *b* паралельна до *a*;
3) *b* перпендикулярна до *a*;
4)*b* перетинає *a*, але не перпендикулярна до цієї площини?

754. Дано зображення куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Довести, що:

1)$AA_1 \perp (ABC)$; 2) $AD \perp (DCC_1)$;
3) $B_1D_1 \perp (A_1C_1C)$; 4) $A_1B_1 \perp BC_1$;
5) ΔAB_1C_1 — прямокутний; 6) AB_1C_1D — прямокутник.

755. Дано: *ABCD* — паралелограм; *MA* = *MC, MB* = *MD*. Довести, що *MO* ⊥ *(ABC)* (рис. 128).

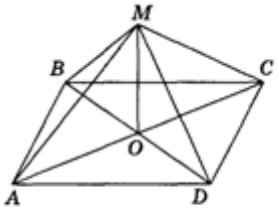


Рис. 128

756. Дано: *ABCD* — квадрат*; MB* = *MD* (рис. 128). Довести, що *BD* ⊥ *(MAO*).

757. Пряма *SA* перпендикулярна до площини прямокутника *ABCD*. Вказати перпендикулярні прямі (рис. 129).

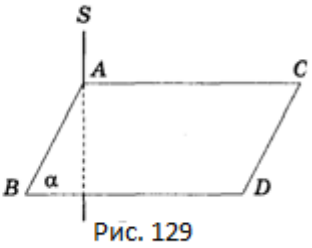


Рис. 129

758. Через точку О перетину діагоналей квадрата зі стороною *a* проведено пряму *OK,* перпендикулярну до площини квадрата. Знайти відстань від точки *K* до вершин квадрата, якщо *OK* = *b*.

759. У трикутнику АВС <C = 90°, *AC* = 6 см, *BC* = 8 см, *CM* — медіана. Через вершину С проведено пряму *CK,* яка перпендикулярна до площини трикутника АВС, причому *CK* =12 см. Знайти *KM*.

760. Пряма *CD* перпендикулярна до площини правильного трикутника АВС. Через центр О цього трикутника проведена пряма *OK,* паралельна до прямої *CD*. Відомо, що АВ = $16\sqrt{3}$ см, ОК = 12см, CD = 16см. Знайти відстань від точок D і К до вершин А і В трикутника.

761. Точка *M* лежить поза площиною прямокутного трикутника *ABC* (<C = 90^0) і рівновіддалена від усіх його вершин. *MO* ⊥ *(ABC)*, де *O* – точка перетину прямої *MO* і площини *ABC*.

1) Визначте положення точки *O*.

2) Знайдіть *MO*, якщо *MA* = 13 см, *AC* = 6 см, *BC* = 8 см.

762. Точка *S* лежить поза площиною правильного трикутника *ABC* і рівновіддалена від усіх його вершин. *SO* ⊥ *(ABC)*, де *O* – точка перетину прямої *SO* і площини *ABC.*

3) Визначте положення точки *O.*

4) Знайдіть *SO*, якщо *AB* = 6 см, *SA* = 4 см.

763. Відрізок *CD* завдовжки 15 см не має спільних точок із площиною β. Прямі *CA* і *DB* , які перпендикулярні до площини β, перетинають цю площину в точках *A* і *B*. Знайдіть *AB*, якщо *BD* = 10 см, *AC* = 22 см.

764. $B_1 \in \beta$; $AA_1 \perp \alpha$, $AA_1 \perp \beta$; $BB_1 \parallel AA_1$; AA_1 = 12 см, A_1B = 13 см (рис.131). Знайти AB.

765. $A_1 \in \alpha$. $B_1 \in \alpha$, $A_2 \in \beta$, $B_2 \in \beta$, $AA_1 \perp \alpha$; $\alpha \parallel \beta$ (рис. 132). Визначити вид трикутників AA_1B_1 і AA_2B_2.

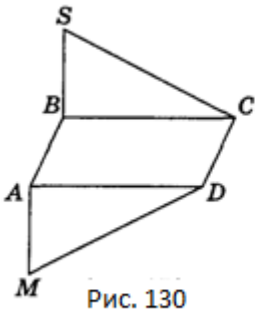


Рис. 130

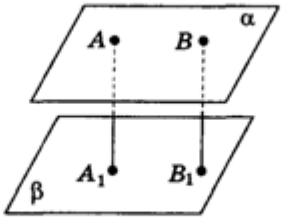


Рис. 131

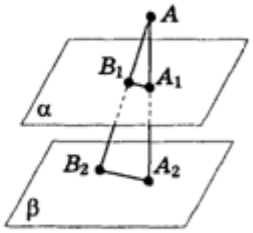


Рис. 132

766. З вершини *A* трикутника *ABC* поставлено перпендикуляр *AM* до площини цього трикутника (рис. 133). *E* — довільна точка відрізка *AM, K* — довільна точка відрізка *BC.* Встановити вид трикутника:

1) *EAB;* 2) *MAC;* 3)*EAK.*

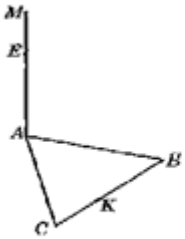


Рис. 133

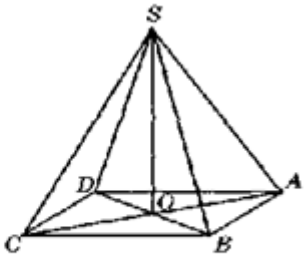


Рис. 134

767. На рис. 134 *ABCD* — паралелограм, *S* — точка поза площиною паралелограма, *SA* = *SC*, *SB* = *SD.* Довести, що пряма *SO* перпендикулярна до площини паралелограма.

768. На рис. 134 *ABCD* — прямокутник, *SO* — перпендикуляр до площини прямокутника. Довести, що *SA* = *SB* = *SC* = *SD.*

769. На рис. 135 *ABCD* — ромб, *S* — точка поза площиною ромба, *SB* = *SD.* Довести, що пряма *BD* перпендикулярна до площини *SAO.*

770. На рис. 136 ∠*ABC* = 90°, ∠*DBC* = 90°. Назвати пряму і площину, які перпендикулярні між собою.

771. З точки перетину діагоналей прямокутника $ABCD$ до його площини поставлено перпендикуляр SO (рис. 135). Знайти відстані від точки S до вершин прямокутника, якщо $AD = 8$, $AB = 6$, $SO = 12$.

772. На рис. 137 $ABCD$ — прямокутник і $SA \perp AB$. Знайти пряму і площину, які перпендикулярні між собою.

773. На рис. 138 пряма KA перпендикулярна до прямої AC, а пряма LC перпендикулярна до прямої BC. Прямі AK і LC — паралельні. Довести, що пряма AK перпендикулярна до площини трикутника ABC.

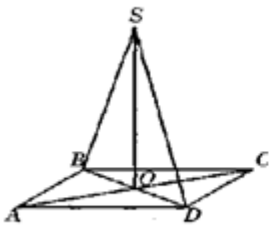


Рис. 135

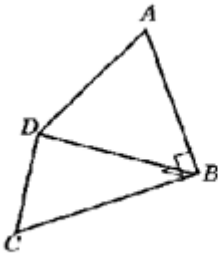


Рис. 136

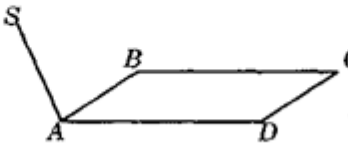


Рис. 137

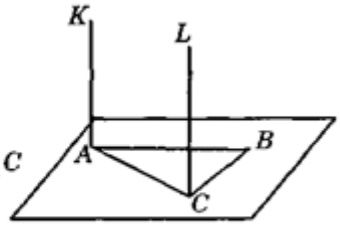


Рис. 138

774. Три точки A_1 B і C розташовані на однаковій відстані від площини a. Чи можна стверджувати, що площини a і (ABC) паралельні?

775. Точки A, B і C лежать на площині a, пряма MC перпендикулярна до площини a (рис. 139).

1) $MA = MB$. Довести: $AC = BC$.
2) $AC = BC$. Довести: $MA = MB$.

776. На рис. 140 пряма AB перпендикулярна до площини a, K — довільна точка площини a, $BC = CA$. Довести, що $AK = BK$.

777. На рис. 141 $ABCD$ — ромб. Пряма AS перпендикулярна до площини ромба. Довести, що $\angle SCB = \angle SCD$.

778. На рис. 142 пряма PO перпендикулярна до площини трикутника ABC, $PA = PB = PC$, $BO = OA$. Довести, що $\angle ACB$ - 90°.

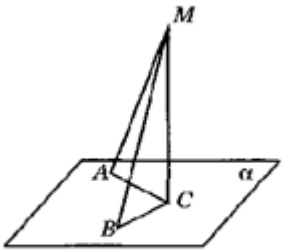


Рис. 139

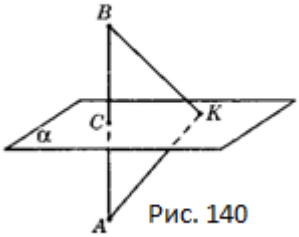


Рис. 140

779. На рис. 143 $\angle KLM = 90°$, $SK = SL = SM$. Опустити перпендикуляр з точки S на площину KLM.

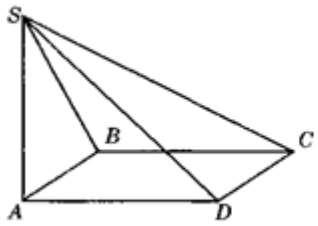


Рис. 141

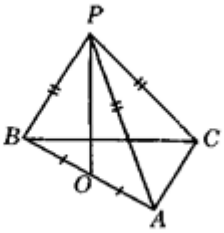


Рис. 142

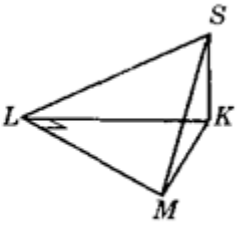


Рис. 143

Життєва математика

780. Одного рулону шпалер вистачає для обклеювання смуги від підлоги до стелі заввишки 1,6 м. Скільки рулонів шпалер потрібно купити для обклеювання прямокутної кімнати розмірами 3,7 м на 4,6 м (площею дверей та вікна знехтувати)?

Перпендикуляр і похила

781. На рис. 144 до площини α з точки A проведено перпендикуляр AC та похилу AB. Знайти:

1) AB, якщо $BC = 3; AC = 4$;
2) AC, якщо $AB = 10$; $BC = 8$;
3) AB, якщо $AC = 7$; $\angle BAC = 30°$;
4) AC, якщо $BC = 5$; $\angle ABC = 45°$;
5) BC, якщо $AB = 10$; $\angle BAC = 60°$,
6) AC якщо $AB = 12$; $\angle$AßC $= 45°$

782. На рис 145 до площини α з точки A проведено дві похилі AB і AC та перпендикуляр AD Знайти:

1) AB, якщо $AC = 10$, CD =6, $DB = 15$;
2) BD якщо $AC = 25$, $CD = 20$, $AB = 17$.

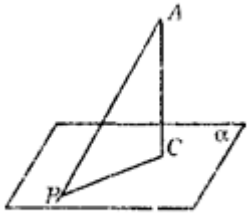


Рис. 144

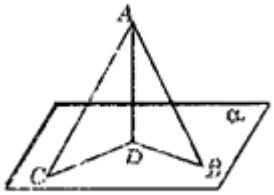


Рис. 145

783. Довести, що коли проекції двох похилих, проведених до площини з однієї точки, рівні, то і рівні похилі.

784. Точка S рівновіддалена від вершин паралелограма $ABCD$ (рис. 146). Довести, що $ABCD$ прямокутник.

785. З вершини A ромба $ABCD$ поставлено перпендикуляр AM до його площини (рис. 147). $AM = 1$, $AB = BD = 3$. Знайти:

1) довжину проекції похилої MC на площину ромба;
2) довжину похилої MC.

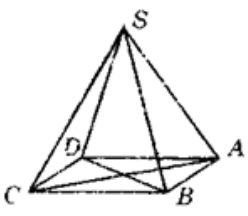


Рис. 146

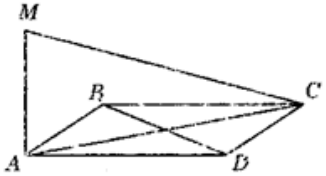


Рис. 147

786. Відрізок *AB*, довжина якого 15 см, спирається своїми кінцями на паралельні площини (рис. 148). Знайти відстань між площинами, якщо проекція цього відрізка на одну з площин дорівнює 12 см.

787. З точки до площини проведено перпендикуляр і похилу, які утворюють між собою кут 60^0. Знайдіть відстань від точки до площини, якщо проекція похилої дорівнює 3 см.

788. З точки до площини проведено похилу, довжина якої 10 см. Знайдіть відстань від точки до площиним, якщо похила утворює зі своєю проекцією кут 45^0.

789. Із точки *A* до площини проведено перпендикуляр *AK* і похилу *AP,* яка на 3 см довша за свою проекцію. Знайдіть довжину похилої, якщо *AK* = 9 см.

790. Із точки *B* до площини проведено перпендикуляр *BL* і похилу *BM,* що дорівнює 26 см. Знайдіть довжину перпендикуляра, якщо він на 14 см коротший за проекцію похилої.

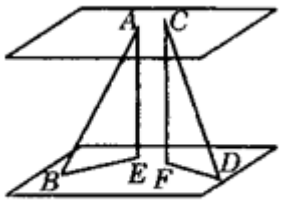


Рис. 148

791. Два відрізки *AB* і *CD* спираються своїми кінцями на паралельні площини (рис. 148). Знайти довжину проекції похилої *CD* на одну з площин, якщо *AB* = 20 см, *CD* = 15 см і проекція похилої *AB* на одну з площин дорівнює 16 см.

792. З точки до площини проведено дві похилі, довжини яких 5 см і 7 см, а різниця їх проекцій – 4 см. Знайдіть проекції похилих і відстань від точки до площини.

793. З точки до площини проведено дві похилі, різниця довжин яких дорівнює 4 см. Знайдіть довжини похилих і відстань від точки до площини, якщо проекції похилих дорівнюють 10 см і 2 см.

794. З вершини *A* ромба *ABCD* проведено перпендикуляр *AM* до його площини, *AM* = 1 см, *AB* = *BD* = 3 см. Знайдіть довжину похилої *MC* та її проекції на площину ромба.

Теорема про три перпендикуляри

795. На рис. 149 $ABCDA_1B_1C_1D_l$ — куб. Довести, що пряма $BC_{1:}$ перпендикулярна до прямої *AB*.

796. На рис. 150 *ABCD* — ромб; *AS* — перпендикуляр до площини ромба. Довести, що прямі *SO* і *BD* — перпендикулярні.

797. На рис. 151 до площини прямокутного трикутника *ABC* (∠*C* = 90°) проведено перпендикуляр *AS*. Знайти відстань від точки *S* до точки *B,* якщо *BC* = 3 см, *SC* = 4 см.

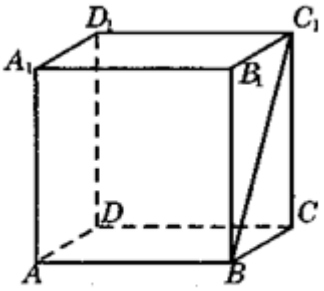


Рис. 149

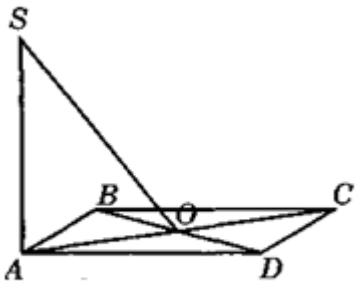


Рис. 150

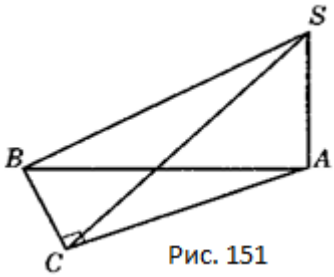


Рис. 151

798. Дано: DB ⊥ (ABC), <BAC = 30°, <ABC = 60° (рис. 152). Довести: *CD* ⊥ *AC*.

799. Дано: DA ⊥ (ABC), <BAC = 40°, <ACB = 50° (рис. 153). Довести: CB ⊥ *BD*.

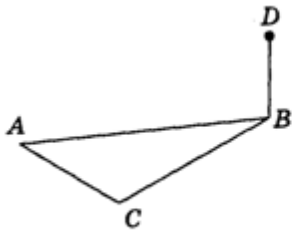


Рис. 152

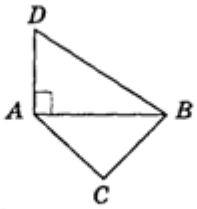


Рис. 153

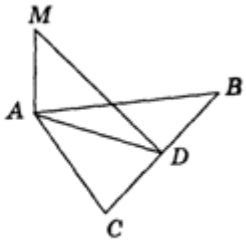


Рис. 154

800. У трикутнику *ABC*, *AC* = *BC* = 10 см, *AB* = 12 см, *CH* – висота трикутника, *CM* – перпендикуляр до площини трикутника, *CM* = 6 см.

1) Знайдіть відстань від точки *M* до вершин трикутника.
2) Доведіть, що *MH*⊥ *AB*.
3) Знайдіть довжину відрізка *MH*.

801. У правильному трикутнику *ABC*, *AM* – медіана, *AP* – перпендикуляр до площини трикутника, *AB* = 2 см, $AP = 2\sqrt{3}$ см.

1) Знайдіть відстань від точки *P* до вершин трикутника.
2) Доведіть, що *PM*⊥ *BC*.
3) Знайдіть довжину відрізка *PM*.

802. З вершини *D* квадрата *ABCD*, площа якого дорівнює 25 см^2, до його площини проведено перпендикуряр *DK*. Знайдіть відстань від точки *K* до вершин *A* і *B* квадрата, якщо *KC* = 12 см.

803. З вершини *C* квадрата *ABCD*, периметр якого дорівнює 32 см, до його площини проведено перпендикуряр *CM*. Знайдіть відстань від точки *M* до вершин *B* і *D* квадрата, якщо *MA* = 17 см.

804. Основа *AB* рівнобедреногр трикутника *ABC* належить площині α, *AC* = *BC* = 13 см, *AB* = 24 см. З точки *C* до площини α проведено перпендикуляр *CO*, а з точки *O* до прямої *AB* – перпендикуляр *OM*. Знайдіть *CM*.

805. Сторона *BC* правильного трикутника *ABC* належить площині β. З точки *A* до площини β проведено перпендикуляр *AK*, а з точки *K* до прямої *BC* – перпендикуляр *KN*. Знайдіть *AN*, якщо *BC* = 6 см.

806. До площини ромба *ABCD* проведено перпендикуляр BM, точка O — точка перетину діагоналей AC і BD ромба. Довести, що $MO \perp AC$.

807. Дано: MA ⊥(ABC); AB = AC; CD = *BD* (рис. 154). Довести: MD ⊥ BC.

808. Дано: MA⊥(ABC); BD = CD; MD ⊥ BC (рис. 197). Довести: AB = AC .

809. На рис. 155 $\angle BAC = 32°$, $\angle ACB = 58°$, пряма *AD* перпендикулярна до площини трикутника *ABC*. Довести, що прямі *BC* і *BD* — перпендикулярні.

810. *****На рис. 156 *SA* — перпендикуляр до площини трикутника *ABC*, *CD = DB*, *SD* ⊥ BC. Довести, що трикутник *ABC* — рівнобедрений.

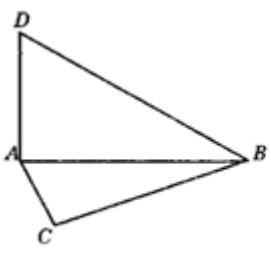


Рис. 155

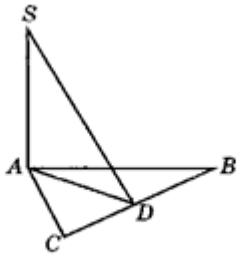


Рис. 156

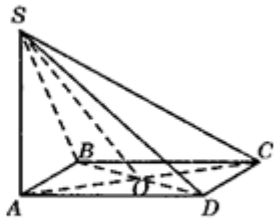


Рис. 157

811. На рис. 157 до площини квадрата *ABCD* поставлено перпендикуляр *AS*. Знайти на цьому рисунку всі прямокутні трикутники, одна з вершин яких — точка *S*.

812. Дано: *AC = BC,* пряма *MC* перпендикулярна до площини трикутника *ABC* (рис. 158). Опустити перпендикуляр з точки *M* на пряму AB.

813. Дано: $\angle ACB = 90°$, пряма *MA* перпендикулярна до площини трикутника *ABC* (рис. 159). Опустити перпендикуляр з точки *M* на пряму *BC*.

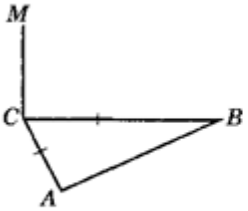


Рис. 158

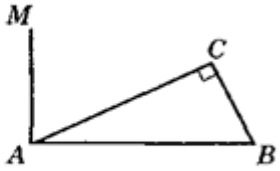


Рис. 159

814. Точка *M* віддалена від площини правильного трикутника на 8 ссм і рівновіддалена від усіх його вершин. Знайдіть відстань від точки *M* до вершин трикутника, якщо периметр трикутника дорівнює $18\sqrt{3}$ см.

815. Точка *K* віддалена від кожної вершини квадрата *ABCD* на 26 см. Знайдіть відстань від точки *K* до площини квадрата , якщо його площа дорівнює 1152 см^2.

816. Площа прямокутного трикутника дорівнює 6 см^2, а різниця його катетів – 1 см. точка *M* віддалена від площини трикутника на 6 см і рівновіддалена від усіх його вершин. Знайдіть відстань від точки *M* до вершин трикутника.

817. Один із катетів прямокутного трикутника дорівнює 6 см, а другий – на 2 см коротший за гіпотенузу. Точка, що не лежить у площині трикутника,

віддалена від кожної з його вершин на 13 см. Знайдіть відстань від даної точки до площини трикутника.

818. На рис. 160 ABC – прямокутний трикутник ($\angle C = 90°$), $AM = MB$, пряма MC перпендикулярна до площини ABC Опустити перпендикуляри з точки S на катети AC і BC.

819. На рис. 161 до площини ромба $ABCD$ поставлено перпендикуляр AC. Опустити перпендикуляри з точки S на пряму BD.

820. У трикутнику ABC вписано коло з центром O. Через точку O перпендикулярно до площини трикутника проведено пряму OM (рис. 162).

1) Довести, що кожна точка X прямої OM рівновіддалена від сторін трикутника.

2) Знайти радіус кола, якщо $OX = 6$ см, а відстань від точки X до сторін трикутника дорівнює 10см.

3) Знайти відстань від точки X до сторін трикутника, якщо радіус кола дорівнює 3 см, $OX = 4$ см.

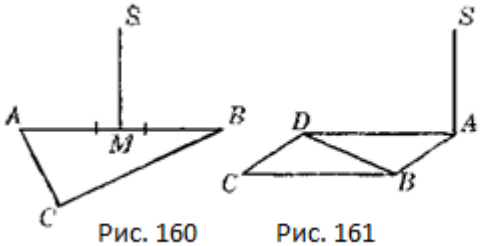


Рис. 160

Рис. 161

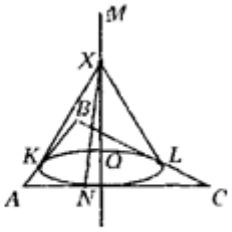


Рис. 162

Життєва математика

821. Необхідно пофарбувати стелю у двох кімнатах: одна з них квадратної форми зі стороною 4 м, а інша – прямокутна з розмірами 5 м і 4 м. Для фарбування 1 м^2 стелі потрібно 240 г фарби. Фарба продається по 2,5 кг. Яку найменшу кількість банок фарби треба придбати?

Двогранні кути. Лінійний кут двогранного кута

822. Двогранний кут дорівнює 116° Чому дорівнює кут між гранями цього кута?

823. Дано двогранний кут з ребром AB (рис. 163). На півплощині a взято точку K. З цієї точки проведено перпендикуляр KM до ребра і перпендикуляр KN до півплощини β. Чи правильне твердження: «Кут KMN є лінійним кутом даного двогранного кута»?

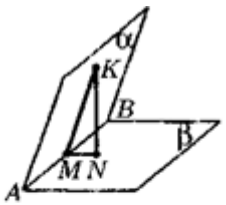


Рис. 163

824. На рис. 164 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ і площина, що проходить через точки A, D і C_1 Які двогранні кути з ребром AD утворює ця площина з гранями куба? Знайти лінійні кути цих двогранних кутів та їхні величини.

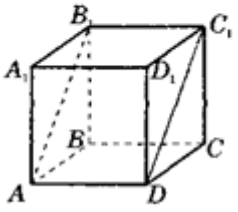


Рис. 164

825. Кут між двома площинами 45º. Знайти градусні міри двогранних кутів, утворених перетином цих площин.

826. Двогранний кут має 120º. Чому дорівнює кут між площинами граней цього кута?

827. У трикутнику ACB <ACB = 90º (рис. 187), PB ⊥(ABC). Довести, що <PBC – лінійний кут двогранного кута з ребром AC.

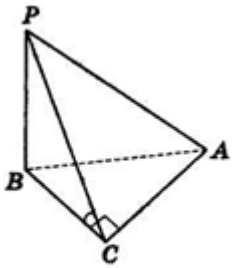


Рис. 187

828. PB⊥(ABC), AB = BC, AD = CD (рис. 188). Довести, що <PDB – лінійний кут двогранного кута з ребром AC.

829. Які з відзначений кутів є лінійним кутом двогранного кута з ребром AC, якщо:

1) точка D – середина AC, ∆ABC – правильний, PB⊥(ABC) (рис. 189);
2) точка M – середина AC (рис. 190), ON ‖ BM, ∆ABC – правильний, PO⊥(ABC)?

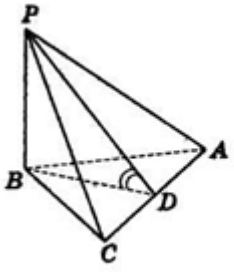


Рис. 188

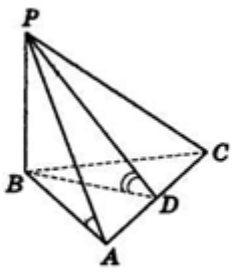


Рис. 189

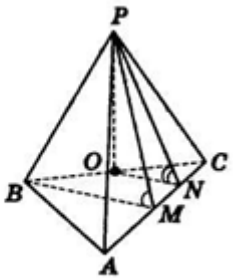


Рис. 190

830. Двогранний кут дорівнює 60^0. На одній із його граней на відстані $2\sqrt{3}$ см від іншої грані позначено точку. Знайдіть відстань від цієї точки до ребра двогранного кута.

831. Двогранний кут дорівнює 45^0. На одній із його граней на відстані $6\sqrt{2}$ см від ребра двогранного кута взято точку. Знайдіть відстань від цієї точки до другої грані двогранного кута.

832. Точка *A* належить одній із граней двогранного кута, а її відстань від другої грані дорівнює $\sqrt{3}$ см. Знайти величину двогранного кута, якщо відстань від точки *A* до його ребра дорівнює 2 см.

833. Точка, що належить одній із граней двогранного кута, лежить на відстані $4\sqrt{2}$ см від другої грані та на відстані 8 см від ребра цього кута. Знайдіть міру дворганного кута.

834. Точка, що належить одній із граней двогранного кута, знаходиться на відстані 10 см від ребра двогранного кута та на відстані 5 см від другої грані. Знайдіть міру дворганного кута.

835. Знайти величину двогранного кута, якщо точка, взята на одній із граней, знаходиться від ребра вдвічі далі, ніж від другої грані.

836. Точка *A* знаходиться від граней прямого двогранного кута на відстанях *a* і *b*. Знайдіть відстань від точки *A* до ребра двогранного кута.

837. Рівнобедренні трикутники ABC і ABC_1 лежать у різних гранях двогранного кута з ребром AB, який дорівнює 120^0. Знайдіть CC_1, якщо $CK = 3$ см, $C_1K = 5$ см, де CK і C_1K – висоти трикутників.

838. Рівнобедренні трикутники KLM і KLM_1 лежать у різних гранях двогранного кута з ребром KL, який дорівнює 60^0. Знайдіть MM_1, якщо $MP = 3$ см, $M_1P = 8$ см, де MP і M_1P – висоти трикутників.

839. Дано два двогранні кути, у яких одна грань спільна, а дві інші грані є різними півплощинами однієї площини. Довести, що сума цих двогранних кутів дорівнює 180°.

840. Двогранний кут дорівнює α. Із точки С на його ребрі у гранях кута проведено перпендикулярні до ребра відрізки CA і CB, причому $CA = a$ і $CB = b$. Знайти відстань від точки А до точки B.

841. Дано двогранний кут з ребром AB (рис. 191). На півплощині a взято точку K. З цієї точки проведено перпендикуляр KM до ребра і перпендикуляр KN до півплощини β. Чи правильне твердження: «Кут KMN є лінійним кутом даного двогранного кута»?

842. На рис. 192 зображено куб $ABCDA_1B_lC_lD_l$ і площина, що проходить через точки A, D і C_1. Які двогранні кути при ребрі AD утворює ця площина з гранями куба? Знайти лінійні кути цих двогранних кутів та їхні величини.

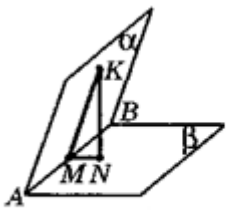


Рис. 191

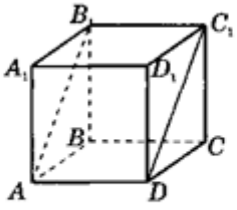
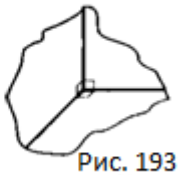


Рис. 192


Рис. 193

Перпендикулярність площин

843. Знайти в оточуючому середовищі моделі перпендикулярних площин.

844. Які твердження правильні?

1) Через точку, взяту поза площиною, можна провести площину, перпендикулярну до цієї площини, і причому тільки одну.

2) Якщо площина a перпендикулярна площині β, то площина a перпендикулярна до будь-якої прямої, яка паралельна площині β.

3) Дві площини, перпендикулярні до третьої, перпендикулярні між собою.

4) Якщо пряма і площина перпендикулярні до однієї і тієї самої площини, то вони паралельні між собою.

845. Площини α і β — перпендикулярні. Як можуть бути розташовані пряма a і площина β, якщо:

1) пряма a паралельна площині α;

2) пряма a належить площині α;

3) пряма a перпендикулярна до площини α;

4) пряма a і площина α перетинаються, але вони не перпендикулярні?

846. Площини квадратів $ABCD$ і $ABKL$ взаємно перпендикулярні (рис. 194). Знайдіть відстані від точки L до точок D і C, якщо $AB = 4$ см.

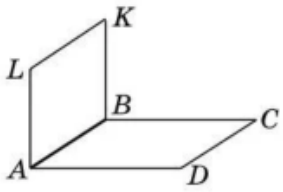


Рис. 194

847. Площини прямокутника $ABCD$ і квадрата $ABKL$ взаємно перпендикулярні (рис. 194). Знайдіть відстані від точки K до точок C і D, якщо $AB = 3$ см, $BC = 4$ см.

848. Площини рівних між собою рівнобедрених трикутників ABC і AB_1C взаємноперпендикулярні (рис. 195). Медіана BK, проведена до основи трикутника ABC, дорівнює $3\sqrt{2}$ см. Знайдіть відстань між точками B і B_1.

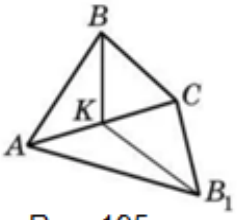


Рис. 195

849. На рис. 165 до площини квадрата $ABCD$ поставлено перпендикуляр DS. Довести, що:

1) площина SAD перпендикулярна до площини SCD;

2) площини SBC і SCD — перпендикулярні.

Знайти ще пари перпендикулярних площин на цьому малюнку.

850. На рис. 167 у трикутнику ABC $\angle C = 90°$. Пряма PB перпендикулярна до площини трикутника ABC. Довести, що площини PAC і PBC — перпендикулярні.

851. $ABCD$ — квадрат, $MD \perp (ABC)$ (рис. 166). Довести, що:

1) $(MAD) \perp (MCD)$; 2) $(MBC) \perp (MCD)$.

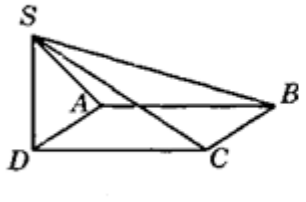


Рис. 165

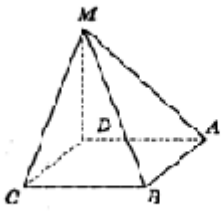


Рис. 166

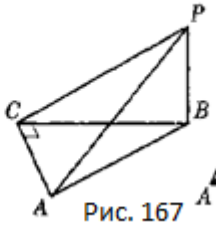


Рис. 167

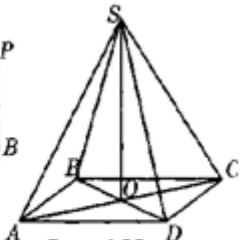


Рис. 168

852. У трикутнику ABC $<C = 90°$; $PB \perp (ABC)$. Довести, що $(PAC) \perp (PBC)$.

853. Чи правильні твердження:

1) через точку, взяту поза площиною, можна провести площину, перпендикулярну до цієї площини, і притому тільки одну;

2) якщо площина перпендикулярна до даної площини, то вона перпендикулярна і до довільної прямої, паралельної цій площині?

854. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Враховуючи, що ребра куба, які виходять з однієї вершини, попарно перпендикулярні, указати серед наведених тверджень правильні:

1) площини AD_1C і AD_1D перпендикулярні;
2) площини AD_1C і CDD_1 перпендикулярні;
3) площини AD_1C і ADC перпендикулярні;
4) площини ADD_1 і ADC перпендикулярні.

855. Площини α і β взаємно перпендикулярні. Точка M віддалена від площини α на 8 см, а від лінії перетину площин – на 10 см. Знайдіть відстань від точки M до площини β.

856. Точка P віддалена від двох взаємно перпендикулярних площин на 8 см і 15 см. Знайдіть відстань від точки P до лінії перетину площин.

857. З точок A і B, які належать двом перпендикулярним площинам α і β, проведено перпендикулярим AC і BD до прямої перетину площин. Знайдіть AC, якщо $AB = 7$ см, $CD = 3$ см, $BD = 2$ см.

858. З точок M і N, які лежать у двох перпендикулярних площинах β і γ, проведено перпендикулярим MK і NL до прямої перетину площин. Знайдіть MN, якщо $ML = 8$ см, $KN = 14$ см, $KL = 2$ см.

859. Площини рівнобедрених трикутників KLM і KLM_1 зі спільною основою KL взаємно перпендикулярні. Знайдіть MM_1, якщо $<M_1 = 60^0$, $KL = 8$ см, $MK = 5$ см.

860. Площини рівнобедрених трикутників ABC і ABC_1 зі спільною основою AB взаємно перпендикулярні, $< ACB = 90^0$, $AB = 10$ см, $AC_1 = 13$ см. Знайдіть CC_1.

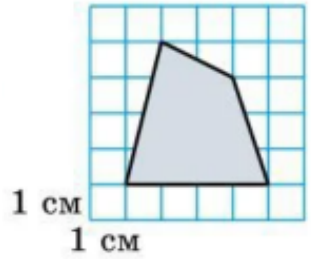
861. Довести, що коли пряма, яка лежить в одній з двох перпендикулярних площин, перпендикулярна до їх лінії перетину, то вона перпендикулярна й до другої площини.

862. Дано дві перпендикулярні площини α і β та пряму c, яка перпендикулярна до площини α. Укажіть, які з наведених тверджень правильні, а які — неправильні:

1) пряма c обов'язково належить площині β;
2) пряма c може бути паралельною площині β;
3) якщо пряма c, належить площині β, то вона паралельна лінії перетину площин α і β;
4) будь-яка площина, яка містить пряму c, перпендикулярна до площини α.

Життєва математика

863. Знайдіть площу (в гектарах) лісового масиву, зображеного на плані з квадратною сіткою 1×1 (у см) в масштабі 1:20 000.



Вимірювання відстаней у просторі: від точки до площини, від прямої до площини, між площинами

864. На рис. 169 зображено куб із ребром *a.* Яка відстань:

1) від точки *B* до прямої B_1C_1;
2) від точки *C* до прямої *BD;*
3) від точки *A* до площини $A_1B_1C_1$;
4*) від точки *A* до площини BDD_1B_1.

865. На рис. 169 зображено куб із ребром *b.* Яка відстань від прямої CC_1 до площини:

1) ABB_1; 2) BDD_1

866. На рис. 169 зображено куб з ребром *a.* Яка відстань:

1) від точки *A* до квадрата $A_1B_1C_1D_1$;
2) від точки *D* до трикутника $A_1B_1D_1$;
3*) від точки *A* до трикутника $B_1D_1C_1$.

867. На рис. 169 зображено куб із ребром *b.* Яка відстань між площинами *ABD* і $B_1D_1C_1$?

868. На рис. 170 зображено куб із ребром завдовжки 10. *MN*— середня лінія трикутника *ABD*, M_1N_1 — середня лінія трикутника $A_1B_1C_1$. Знайти відстань між площинами MNN_1M_1 і BDD_1B_1.

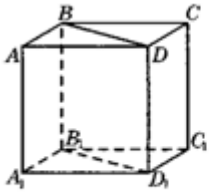


Рис. 169

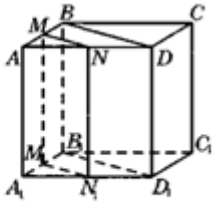


Рис. 170

869. Пряма *a* паралельна площині α (рис. 170.1). З деякої точки *M* прямої *a* до площини α проведено похилу завдовжки 5 см, проекція якої *KN* дорівнює 4 см. Знайдіть відстань від прямої *a* до площини α.

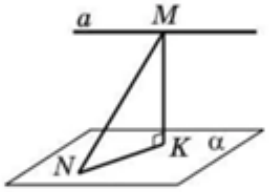


Рис. 170.1

870. Кінці відрізка *MN*, що не перетинає площину α, знаходяться на відстані 6 см і 10 см відповідно від цієї площини. На якій відстані від площини знаходиться середина відрізка *MN*?

871. Кінці відрізка *AB*, що перетинає площину β, знаходяться на відстаннях 8 см і 4 см відповідно від цієї площини. На якій відстані від площини знаходиться середина відрізка *AB*?

872. З точки *A* до площини β проведено похилу завдовжки $8\sqrt{3}$ см та перпендикуляр, які утворюють між собою кут 30^0. Знайдіть відстань від точки *A* до площини β.

873. З точки *B* до площини α проведено перпендикуляр і похилу. Знайдіть відстань від точки *B* до площини α, якщо проекція похилої дорівнює $3\sqrt{2}$ см і утворює з похилою кут 45^0.

874. Один із кінців відрізка лежить у площині α, а його середина віддалена від площини на 3 см. На якій відстані від площини знаходиться другий кінець відрізка?

875. Один із кінців відрізка лежить у площині α, а другий віддалений від неї на 10 см. На якій відстані від площини знаходиться середина цього відрізка?

876. Через вершину *A* прямокутника *ABCD* до його площини проведено перпендикуляр *AK*. Знайдіть відстань від точки *K* до прямої *CD*, якщо *AC* = 20 см, *CD* = 16 см, *AK* = 9 см.

877. Через вершину *B* квадрата *ABCD* до його площини проведено перпендикуляр *BM*. Знайдіть відстань від точки *M* до прямої *AD*, якщо $BD = 4\sqrt{2}$ см, *BM* = 3 см.

878. У трикутнику *ABC AC* = 5 см, *AB* = 6 см. *CM* – перпендикуляр до площини трикутника, *CM* = 3 см. Знайдіть відстань від точки *M* до прямої *AB*.

879. *BK* – перпендикуляр до площини рівностороннього трикутника *ABC*, *AB* = $6\sqrt{3}$ см, *BK* = 12 см. Знайдіть відстань від точки *K* до прямої *AB*.

880. Через вершину *A* квадрата *ABCD* проведено перпендикуляр *AT*. Знайдіть відстань від точки *T* до прямих, що містять діагоналі квадрата, якщо *AB* = 8 см, *AT* = 7 см.

881. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 5 см і 9 см. Через середину гіпотенузи до площини трикутника проведено перпендикуляр завдовжки 6 см. Знайдіть відстань від кінця перпендикуляра, що не лежить у площині трикутника, до прямих, що містять катети трикутника.

882. Точка *S* рівновіддалена від усіх вершин прямокутника *ABCD* і знаходиться на відстані 3 см від його площини. Знайдіть відстань від точки *S* до точки *A*, якщо *CD* = 4 см, $< CAD = 30^0$.

883. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 24 см. Точка Q, що не лежить у площині трикутника, віддалена від кожної з його вершин на 20 см. Знайдіть відстань від точки Q до площини трикутника.

884. Точка віддалена від кожної з прямих, що містять сторони рівностороннього трикутника, на 15 см, а від площини трикутника – на 12 см. Знайдіть площу трикутника.

885. Площа правильного трикутника дорівнює $27\sqrt{3}$ см^2. Відстань від точки *M*, що лежить поза площиною трикутника, до прямих, що містять сторони трикутника, дорівнює 5 см. Знайдіть відстань від точки *M* до площини трикутника.

886. Точка *K* віддалена від двох даних паралельних прямих на 13 см і 15 см, а відстань між цими прямими – 14 см. Знайдіть відстань від точки *K* до площини, у якій лежать ці паралельні прямі.

887. З вершини більшого кута трикутника, сторни якого дорівнюють 21 см, 13 см і 20 см, до площини трикутника проведено перпендикуляр завдовжки 35 см. Знайдіть відстані від кінців перпендикуляра до апрямої, що містить протилежну до цього кута сторону трикутника.

888. На рис. 169 зображено куб із ребром *a*. Знайти відстань між мимобіжними прямими: 1) DD_l і B_1C_1; 2) B_lD_1 і CC_l

889. На рис. 171 зображено куб із ребром *b*. Знайти відстань між мимобіжними прямими OO_1 і D_lC_1.

890. На рис. 172 зображено куб із ребром *b*. Знайти відстань між мимобіжними прямими: 1) A_1B і DD_1; 2) A_1B і C_1D.

891. На рис. 171 зображено куб із ребром *a*. Знайти відстань між трикутником ACD і квадратом $A_lB_lC_lD_1$

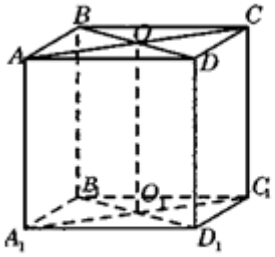


Рис. 171

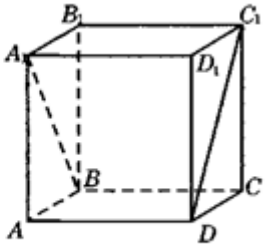


Рис. 172

Життєва математика

892. Коробка має форму прямокутного паралелепіпеда з вимірами 20 см, 30 см і 50 см. Скільки таких коробок можна помістити в кузов вантажівки, розміри якого 2 м, 3 м і 1,5 м.

Вимірювання кутів у просторі

893. Чи може кут між мимобіжними прямими дорівнювати:

1)0°; 2)35°; 3)90°; 4)115°?

894. Вказати в оточенні мимобіжні перпендикулярні прямі.

895. Чи може кут між площинами, що перетинаються, дорівнювати:

1) 0°; 2) 10°; 3) 90°; 4) 120°?

896. Який кут між суміжними гранями куба?

897. Який кут між протилежними гранями куба?

898. На рис. 173 зображено куб. Заповнити таблицю, вказавши кути між прямими.

Прямі	AA_1	CB_1	A_1B_1
BC			
BC_1			
DC_1			

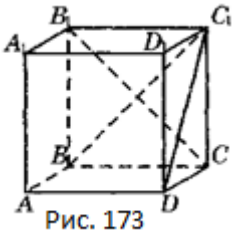


Рис. 173

899. Пряма AS перпендикулярна до сторін AB *і* AC трикутника ABC (рис. 174). Знайти кут між прямими AS і BC.

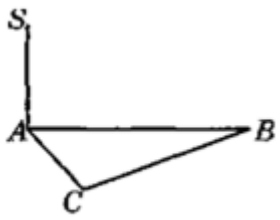


Рис. 174

900. До скількох ребер куба перпендикулярна пряма DC_1 (рис. 173)?

901. На рис. 173 зображено куб. Знайти кут між площинами AB_1C_1D і $ABCD$.

902. Похила утворює з площиною кут 45° (рис. 175). Знайти її довжину, якщо довжина її проекції дорівнює $4\sqrt{2}$ см.

903. Похила утворює з площиною кут 30° (рис. 175) Довжина похилої – 2 м. Знайти довжину її проекції.

904. Похила утворює з площиною кут 60° (рис. 175). Знайти відстань від кінця похилої до площини, якщо довжина похилої дорівнює $4\sqrt{3}$ дм.

905. На рис. 176 зображено куб. Знайти кут між:

1) прямою AB_1 і площиною ABD;
2) примою AC і площиною AA_1D_1D;
3) прямою AC_1 і площиною ABC;
4) прямою AC і площиною AA_1B_1 ;
5) прямою і AA_1 площиною AC_1B_1.

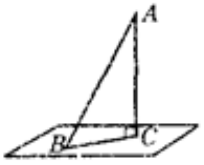


Рис. 175

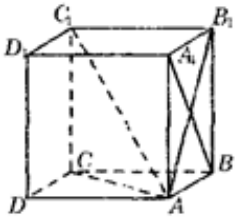


Рис. 176

906. З точки до площини проведено дві похилі. Одна з них, завдовжки 12 см, утворює з площиною кут 30°. Знайти довжину другої похилої, якщо вона утворює з площиною кут 60°.

907. Із точки до площини проведено похилу завдовжки 12 см. Знайдіть кут, який утворює похила з площиною, якщо проекція похилої дорівнює $6\sqrt{3}$ см.

908. Із точки до площини проведено похилу завдовжки 8 см. Знайдіть кут, який утворює похила з площиною, якщо перпендикуляр, проведений із точки до площини, дорівнює $4\sqrt{2}$ см.

909. Дві площини перетинаються під кутом 60^0. Точка P лежить в одній з них і віддалена від другої на $6\sqrt{3}$ см. Знайдіть відстань від точки P до лініх перетину площин.

910. Дві площини перетинаються під кутом 30^0. Точка M лежить в одній з них і на 10 см віддалена відїх лінії перетину. Знайдіть відстань від точки M до другої площини.

911. Дві площини перетинаються під кутом 30°. Точка M лежить в одній із цих площин і віддалена від другої площини на $8\sqrt{3}$ см. Знайти відстань від точки M до лінії перетину площин.

912. Точка O — центр квадрата, $ABCD$, OT— перпендикуляр до площини квадрата, $AB = 6$ см. Пряма AT нахилена до площини квадрата під кутом 45°. Знайти довжину відрізка AT.

913. Пряма a перпендикулярна до чотирьох прямих, що лежать у площині a. Чи можна стверджувати, що пряма a перпендикулярна до площини a?

914. Пряма перпендикулярна до двох сторін паралелограма. Чи можна стверджувати, що вона перпендикулярна до площини паралелограма?

915. Пряма перпендикулярна до двох суміжних сторін ромба. Чи можна стверджувати, що вона перпендикулярна до площини ромба?

916. На рис. 177 до площини квадрата $ABCD$ поставлено перпендикуляр OS. З точки O опущено перпендикуляр OM на пряму CD. Назвати кути між:

1) прямою SD і площиною ABD; 2*) прямою SC і площиною MOS;
3) прямою SO і площиною SDC.

917. *На рис. 178 до площини квадрата $ABCD$ поставлено перпендикуляр SO. Назвати кути між:

1) прямою SD і площиною SAB; 2) прямою SC і площиною ABC;
3)прямою SO і площиною SBC; 4)прямою OC і площиною SBA.

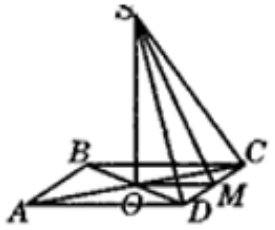


Рис. 177

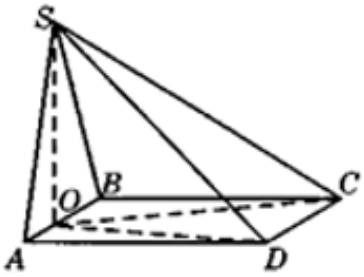


Рис. 178

918. На рис. 179 пряма SO перпендикулярна до площини ABC; точка O лежить у площині ABC; прямі OK і AB — перпендикулярні. Назвати на цьому рисунку кути між площинами:

1) SOK і SOA; 2) ABS і ABC.

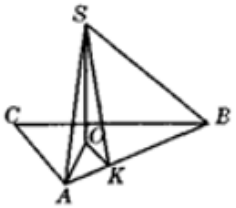


Рис. 179

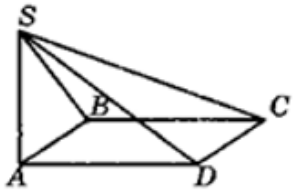


Рис. 180

919. На рис. 180 зображено квадрат $ABCD$, а пряма SA перпендикулярна до площини квадрата. Назвати на цьому рисунку кути між площинами:

1) SDC і ABC; 2) SAD і ABC; 3) SAB і SAD.

920. З точки до площини проведено дві похилі. Одна з них, завдовжки 8 см, утворює з площиною кут 30^0. Знайдіть довжину другої похилої, якщо вона утворює з площиною кут 60^0.

921. З точки до площини проведено дві похилі. Одна з них утворює з площиною кут 45^0, а друга – 30^0. Проекція першої похилої на площину дорівнює $2\sqrt{2}$ см. Знайдіть довжину другої похилої.

922. Точка O – центр квадрата $ABCD$, OK – перпендикуляр до площини квадрата. Пряма AK нахилена до площини квадрата під кутом 60^0. Знайдіть довжину відрізка AK, якщо $AB = 4$ см.

923. AS – перпендикуляр до площини квадрата $ABCD$. Пряма SC нахилена до площини квадрата під кутом 30^0. Знайдіть довжину відрізка SC, якщо $AB = 6$ см.

924. Дано прямокутник $ABCD$ зі сторонами $AB = 9$ см і $BC = 12$ см. AM – перпендикуляр до площини прямокутника. Пряма MC нахилена до площини прямокутника під кутом 30^0. Знайдіть:

1) довжину перпендикуляра MA;
2) тангенс кута нахилу прямої MB до площини прямокутника;
3) тангенс кута, який утворює площина MDC з площиною прямокутника.

925. Через гіпотенузу AB прямокутного трикутника ABC проведено площину α. Відстань від точки C до площини α дорівнює 6 см. Який кут утворює пряма BC з площиною α, якщо $AB = 14$ см, $AC = 5$ см.

926. Через гіпотенузу AB прямокутного трикутника ABC проведено площину β. Катет AC утворює з площиною β кут 60^0. Знайдіть відстань від точки C до площини β, якщо $AB = 10$ см, $BC = 8$ см.

927. Через сторону рівностороннього трикутника проведено площину, яка утворює з площиною трикутника кут 60^0. Знайдіть кути, які утворюють дві інші сторони трикутника з цією площиною.

928. Через гіпотенузу рівнобедреного прямокутного трикутника проведено площину, яка утворюєз площиною трикутника кут 30^0. Знайдіть кути, які утворюють катети трикутника з цією площиною.

929. У ромбі $ABCD$ $AB = 8$ см, $< BAD = 45^0$. З вершини B до площини ромба проведено перпендикуляр BK. Площина AKD утворює з площиною ромба кут 60^0. Знайдіть:

1) Відстань від точки K до площини ромба;
2) Площу трикутника AKD.

Ортогональне проектування

930. Знайти ортогональні проекції відрізка D_1B на грані куба (рис. 181).

931. Ребро куба дорівнює 1 (рис. 181). Знайти площу перерізу AB_1C_1D.

932. Площа перерізу AB_1C_1D (рис. 181) дорівнює $4\sqrt{2}$ (кв. од.). Знайти ребро куба.

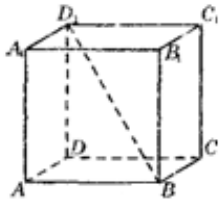


Рис. 181

933. Заповнити порожні місця таблиці.

Площа многокутника (кв. од.)	Кут між площинами многокутника і його ортогональної проекції	Площа проекції (кв. од.)
50	30°	
40	45°	$8\sqrt{2}$
60		30

934. Чи може площа ортогональної проекції многокутника:

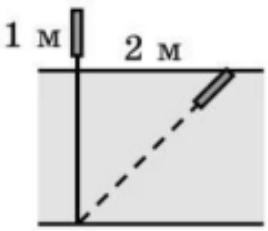
1) дорівнювати площі цього многокутника;
2) бути більшою від площі цього многокутника;
3) бути меншою від площі цього многокутника?

935. Ортогональною проекцією ромба зі стороною 5 см і діагоналлю 8 см є паралеграм. Кут між площинами ромба і паралелограма дорівнює 45^0. Знайдіть площу паралелограма.

936. Ортогональною проекцією паралеграма є ромб, сторна якого дорівнює 13 см, а одна з діагоналей – 10 см. Знайдіть площу паралелограма, якщо кут між площинами паралелограма і ромба дорівнює 30^0.

Життєва математика

937. Очеретина виступає на 1 м над поверхнею озера. Її верхівку зрівняли з поверхнею води, відхиливши від вертикального положення на 2 м у бік. Знайдіть глибину озера в місці, де росте очерет.



Розділ 7. ВЕКТОРИ І КООРДИНАТИ В ПРОСТОРІ

Прямокутна система координат у просторі

938. Які точки лежать на координатних осях: A(5; 0; -2); B(0; 1; 0); C(-2; 0; 0); D(-7; 10; 0); E(0; 0; -11)? Вказати, на яких саме.

939. Точка A розміщена на від'ємній півосі ординат на відстані 5 від початку координат. Які координати точки A?

940. Сторона квадрата OABC дорівнює 5 (рис.182) . Знайти координати його вершин.

941. Сторона куба (рис. 183) дорівнює 10. Знайти координати його вершин.

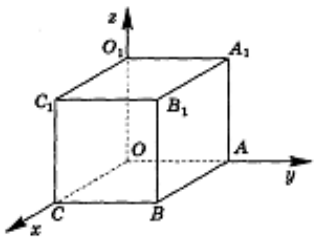


Рис. 182

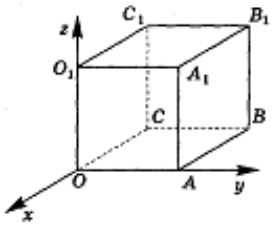


Рис. 183

942. Дві перші координати точки дорівнюють нулю, а третя — від'ємна. Як розміщена ця точка у просторі?

943. Дано точки A(1;2;3), B(0;1;2), C(0;0;3), D(1;2;0). Які з цих точок лежать:

1) у площині XУ; 2) на осі Z; 3) у площині УZ.

944. Які точки лежать у координатних площинах: A(8; 0; -2);B(-5; 2; 3); C(0; -2; 3); D(0; 3; 0): E(-7; -5; 0); F(2; -2; 2)? Вказати, в яких саме.

945. Точка S лежить на площині xy, але не на осях координат. Що можна сказати про координати цієї точки?

946. Побудувати точки A(1; 2; 3), B(3; -1; 3), C(1; 2; 0), F(0; 1, -2), X(0; 0; -1).

947. Записати координати точки A, якщо відомо, що вона розміщена:

1) на від'ємній півосі г на відстані 5 від початку координат;

2) в площині xy на відстані 3 і 4 від осі x і y відповідно;

3) на відстані 3, 4, 5 від координатних площин xy, zx, zy відповідно;

4) на відстані 3, 4, 5 від координатних осей x, y, z відповідно.

948. У точок A(-1; 3; 5) і B(-1; 3; 2) дві перші координати однакові, а треті — різні. Яка особливість розміщення цих точок у просторі? Яка відстань між цими точками?

949. Які точки лежать на одній прямій, паралельній осі абсцис:
A(-2; 3; -1); B(2; -3; 1); C(-12; 3; -1); D(5; 3; 1); E(0; -3; -1)?

950. У точок A(2; -3; 4); B(1; 5; 4) треті координати однакові, а дві перші — різні. Яка особливість розміщення цих точок у просторі?

951. Які точки лежать в одній площині, паралельній площині yz:
A(4; -2; 12); B(-4; 2; 13); C(4; 3; 1); D(7; 2; 13)?

952. На якій відстані від площини xy розміщені точки:
A(—2; 3; —8), B(5;-4; 0), C(7; 7; 14)?

953. На яких відстанях від координатних площин знаходиться точка A(-2; 3; -18)?

954. На рис. 184 зображено куб із ребром завдовжки 2.

1) Знайти координати вершин куба.

2) Чи правильно, що у точок M і N одна з координат однакова? Яка саме?

955. Коло з центром O і з радіусом 3 розміщено у площині yz (рис. 185). Які координати точок A, B, C, D?

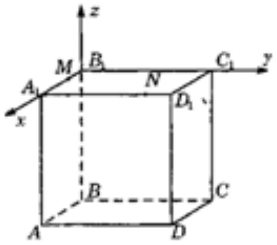


Рис. 184

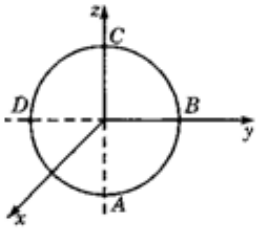


Рис. 185

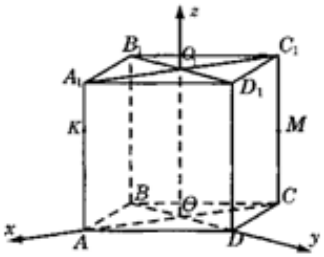


Рис. 186

956. На рис. 186 зображено куб. Відомо, що OD = 3. Знайти координати:

1) вершин куба; 2) точки O_1;

3) точки M, якщо $CM=MC_1$; 4) точки K, якщо $AK : KA_1 = = 2:1$.

Відстань між точками. Координати середини відрізка

957. На якій відстані від початку координат знаходяться точки A(2; 0; 0);B(0; -4; 0); C(2; -2; 1); D(0; 0; -11)?

958. Знайти відстань між точками:

1) A(0: 3; 0) і B(-4; 0; 0); 2) C(0; 5; 0) і D(0; -2; 0).

959. Чи лежать точки A(2;-1;3) і B(3;-2;1) на однаковій відстані від початку координат.

960. Знайти відстань AB, якщо A(-1; 3; -1), B(-1; 0; - 5).

961. Знайти відстань від точки A(-1; 2; - 2) до початку координат.

962. Знайти периметр трикутника ABC, якщо A (7; 1; -5), B(4;-3;-4),C(1;3;-2).

963. Чи лежать точки A,B,C на одній прямій, якщо A(3;2;2),B(1;1;1),C(-1;0;0)?

964. На якій відстані від координатних площин і координатних осей розташована точка A (- 2; 3; 4) ?

965. Яка з точок — A (2; 1; 6) чи B (-2; 1; 6) — лежить ближче до початку координат?

966. Знайти відстані від точки (1;2;-3) до:

1)координатних площин; 2)осей координат; 3) початку координат.

967. На осі x знайти точку C(x;0;0), рівновіддалену від двох точок A(1;2;3), B(-2;1;3).

968. Дано точки K(0; 2; 1), P(2; 0; 3) і T(-1; y; 0). Знайти таке значення y, щоб виконувалась умова: KT = PT .

969. Знайти координати середини відрізка MN, якщо M(2; —3; 4) і N(-2; -7; 8).

970. Дано C(2; 6; 3), A(4; 2; 1). Знайти координати точки B, якщо відомо, що AC = BC і точки A, B, C лежать на одній прямій.

971. Дано точки A(-1;2;4), B(1;0;2), C(2;-3;0), D(0;-1;2). Визначити тип чотирикутника ABCD.

972. Які координати середини C відрізка AB, якщо A(0; 2; -11), B (2; 0; -1)?

973. Знайти координати середин сторін трикутника ABC, якщо A(2; 0; 2), B(2;2;0), C(2;2;2).

974. При яких значеннях p перпендикулярні вектори $\vec{a} = (1; 2; 3)$ та $\vec{b} = (p; -2; 1)$.

975. При яких значеннях k, l вектори $\vec{a} = (2; 1; l)$ та $\vec{b} = (-1; k; 1)$ колінеарні.

976. Чи є точка O(1;1) центром кола, яке проходить через точку A(5;4)і B(4;-3).

977. Чи перпендикулярні прямі AB і AC, якщо A(2;1;3), B(0;1;-1), C(-2;0;3)?

978. Знайти довжину медіани AM трикутника ABC, якщо A(2; 1**;** 3), B(2; 1; 5), C(0; 1; 1).

979. Довести, що чотирикутник ABCD з вершинами у точках A(1;2;3), B(0;2;4), C(1;1;4), D(2;2;2) є паралелограмом.

980. Знайти координати вершини D паралелограма ABCD, якщо координати решти трьох його вершин відомі:

1)A(2;3;2), B(0;2;4), C(4;1;0); 2) A(1;-1;0), B(0;1;-1), C(-1;0;1);
3) A(4;2;-1), B(1;-3;2), C(-4;2;1).

981. Довести, що середина відрізка з кінцями у точках C(a;b;c) і D(p;q;-c) лежать у площині *xy*.

982. Обчислити координати точки, рівновіддаленої від точок A(1;2;1) та B(2;1;3) і розміщеної:

1)на осі *0x*; 2) на осі *0y*.

983. Точки M(-2; 3; 4), N(3; 5; 2) і K(3; -5; 1) — середини сторін трикутника. Знайти координати вершин цього трикутника.

984. Довести, що чотирикутник ABCD є паралелограмом, якщо A(-3; 4; -5); B(1; -8; 7); C(3; -4; 5); D(-1; 8; -7).

985. M — середина відрізка OB. Знайти координати точки B, якщо M(-1; 2; 3), а точка O — початок координат.

986. Дано дві вершини A(2; -1; 3) і B(3; -4; 5) паралелограма ABCD і точку перетину його діагоналей O(4; -5; 0). Знайдіть координати точок C і D.

987. Доведіть, що трикутник з вершинами в точках *A*(4; 0; 7), *B*(0; 8; -1) і *C*(2; -2; 3) – прямокутний.

2) Знайдіть площу трикутника *ABC*.

988. Доведіть, що трикутник з вершинами в точках A(5; 0; 7), B(0; 3; -1) – гострокутний.

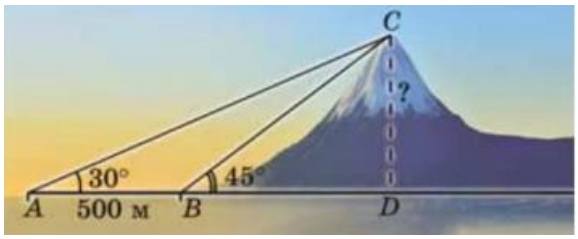
989. Визначте координати кінців відрізка, який точками M(3; 0; 3) і N(6; -2; 1) поділено на три рівні частини.

990. Чи лежать точки A(-1; -5; 6), B(4; 5; 1) і C(-2; -7; 7) на одній прямій? Якщо так, укажіть, яка з точок лежить між двома іншими.

991. 1) Знайдіть координати проекції точки M(-9; 12; 16) на кожну з осей координат.
2)Знайдіть відстань від точки *M* до осей координат.

Життєва математика

992. З деякої точки вершину гори видно під кутом 30^0. Коли спостерігачі наблизилися до гори на 500 м, вершину стало видно під кутом 45^0. Знайдіть наближено висоту гори (з точністю до десятих метра).



Вектори у просторі. Дії з векторами

993. Позначте точки A, B і C, що лежать на одній прямій. Проведіть вектори $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{CB}$.

994. *ABCDEF* – правильний шестикутник (рис. 187). Запишіть усі пари:
1) рівних векторів;
2) рівних за модулем, але протилежно напрямлених векторів.

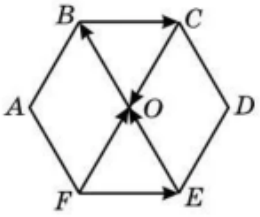


Рис. 187

995. Накресліть вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$. Побудуйте їх суму і різницю.

996. Накресліть вектор $\vec{p}$, довжина якого 6 см. Побудуйте вектори: $-\vec{p}$; $\frac{1}{3}\vec{p}$; $2\vec{p}$; $-1{,}5\vec{p}$.

997. KLMN- ромб. Укажіть усі пари рівних векторів і векторів, що мають рівні модулі, початком і кінцем яких є вершини ромба.

998. *ABCD* — паралелограм (рис. 188). Точка *T* не лежить у площині паралелограма. Спростити:
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OT}$.

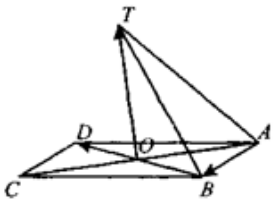


Рис. 188

999. На рис. 189 зображено куб. Спростити: $\overrightarrow{B_1D} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{DB}$.

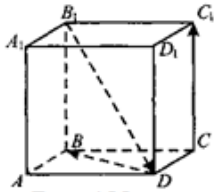


Рис. 189

1000. *ABCD* – трикутна піраміда (рис. 190), *M, N, L* – середини ребер *AD*, *DC* і *BC* відповідно. *AC* = 4 см, *BC* = 6 см, *NL* = 5 см. Знайдіть довжину вектора:
1) $\overrightarrow{CA}$; 2) $\overrightarrow{MN}$; 3) $\overrightarrow{BD}$; 4) $\overrightarrow{CL}$.

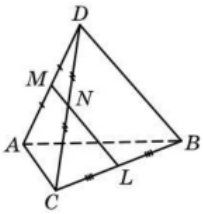


Рис. 190

1001. *ABCD* – трикутна піраміда (рис. 190), *M, N, L* – середини ребер *AD*, *DC* і *BC* відповідно. *AD* = 6 см, *MN* = 2 см, *BD*= 8 см. Знайдіть довжину вектора:
2) $\overrightarrow{DA}$; 2) $\overrightarrow{AM}$; 3) $\overrightarrow{AC}$; 4) $\overrightarrow{NL}$.

1002. Накресліть прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ та відкладіть від точки:

1) *C* вектор, що дорівнює вектору $\overrightarrow{BC}$;

2) A_1 вектор, що дорівнює вектору $\overrightarrow{BB_1}$;

3) *D* вектор, що дорівнює вектору $3\overrightarrow{BC}$;

4) C_1 вектор, що дорівнює вектору $0{,}5\overrightarrow{CC_1}$.

1003. Не виконуючи побудови, знайдіть:

1) $\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{TB}$; 2) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BK}$;

3) $\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{KP} + \overrightarrow{MK}$; 4) $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{TM}$.

1004. *KLMN* – трикутна піраміда. Побудуйте вектор:

1) $\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{KM} + 2\overrightarrow{LN}$; 2) $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{NL} - \frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$.

1005. $ABCDA_1B_1C_1D_1$- куб. Укажіть векторп, початком і кінцем якого є вершини куба, якщо він дорівнює сумі:

1) $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{A_1D_1}$; 2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD_1}$.

1006. Точка *K* не лежить у площині трикутника *ABC, M* – середина *AB*, *N* – середина *BC*, $\overrightarrow{KM} = \vec{m}$, $\overrightarrow{KN} = \vec{n}$. Виразіть вектор $\overrightarrow{AC}$ через вектори $\vec{m}$ і $\vec{n}$.

Життєва математика

1007. Кут підйому дороги дорівнює 5^0. Використовуючи калькулятор, знайдіть висоту, на яку підніметься пішохід, пройшовши 200 м.



Координати вектора. Дії над векторами, що задані координатами

1008. Які координати вектора $\overrightarrow{AO}$, якщо A(- 2; 1; 8), а точка O — початок координат?

1009. Знайти координати вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо:

1) A(-1;2;3); B(8;-7;13); 2) A(0; -2; 4); B(3; -2; -4).

1010. Дано вектори $\vec{a}$ (-2; 3; 8); $\vec{b}$ (2; 3; 11). Знайти:

1) $\vec{a} + \vec{b}$; 2) $\vec{a} - \vec{b}$.

1011. Вектор $\vec{a}$ (-3; 1; 2) відклали від початку координат і дістали вектор $\overrightarrow{OA}$. Знайти координати точки A.

1012. У якого з векторів $\vec{a}$ (1; 0; 3) чи $\vec{b}$ (2; 2; 0) більший модуль?

1013. Модуль вектора $\vec{a}$ *(x; 2; - 2)* дорівнює 3. Знайти *x*.

1014. Знайдіть модуль вектора:

1) $\vec{m}$(6; 0; -8); 2) $\vec{n}$(-1; -2; 2).

1015. Дано вектори $\vec{m}$*(x; y; -2)* і $\vec{n}$*(0; -1; z)*, $\vec{m} = \vec{n}$. Знайдіть *x, y* і *z*.

1016. Дано вектор $\vec{a}$(-2; 0; 8). Знайдіть координати вектора:

1) $4\vec{a}$; 2) $-\frac{1}{2}\vec{a}$; 3) $10\vec{a}$; 4) $-3\vec{a}$.

1017. Серед векторів $\vec{a}$ (1; 2;-3), $\vec{b}$ (-1;-2; 3); $\vec{c}(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}:-1)$; $\vec{d}$(-8; -16;24) знайти:

1) однаково напрямлені вектори;

2) протилежно напрямлені вектори.

1018. Знайдіть модуль вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо:

1) $A(0; 2; 5)$, $B(6; 5; 7)$; 2) $A(3; -2; 7)$, $B(5; -24\ 11)$.

1019. Чи рівні вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$, якщо $A(2; -1; 4)$, $B(5; -3; 7)$, $C(1; 1; 2)$, $D(4; -1; 4)$?

1020. Дано $\vec{a}(3; -4; 5)$; $\vec{b}(x; y; z)$; $\vec{c}(-4; 0; 8)$; $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$. Знайдіть x, y і z.

1021. Дано $\vec{a}(4; -8; 9)$; $\vec{b}(x; y; z)$; $\vec{c}(0; 2; -10)$; $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$. Знайдіть x, y і z.

1022. Задано вектори $\vec{m}(-2; 1; 0)$ і $\vec{n}(2; -1; 2)$. Знайдіть координати векторів:

1) $2\vec{m} + \vec{n}$; 2) $\vec{m} - 3\vec{n}$; 3) $3\vec{m} + 4\vec{n}$; 4)$5\vec{m} - 2\vec{n}$.

1023.Чи колінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

1) $\vec{a}(1; 8; 3)$; $\vec{b}$ (2; 16; 5); 2) $\vec{a}$ (-1; 3; 0); $\vec{b}$(3; -9; 0);

3) $\vec{a}$ (0; 0; 17); $\vec{b}$ (0; 0; 190); 4) $\vec{a}$ (-1; 0; 4); $\vec{b}$ (-4; 1; 16)?

1024. Вектори $\vec{a}$ (2; y; z) і $\vec{b}$ (1; 4; - 3) колінеарні. Знайти y і z.

1025. Вектори $\vec{a}$ (x; -1; 4) і $\vec{h}$ (2; y; 8) колінеарні. Знайти x і y.

1026.Дано: $A(2; 1; -4)$; B(x; y; z); $\vec{a}$ (3; 0, 5). Знайти x; y; z, якщо $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$.

1027. Дано точки $C(-2; 0; 4)$ і $D(6; 8; -2)$. Знайдіть координати точки K такої, що $\overrightarrow{CK} + \overrightarrow{DK} = \vec{0}$.

1028. Дано $\vec{a}(-2; 3; -1)$; $\vec{b}(4; 0; 8)$. Знайдіть модуль вектора $\vec{c} = 2\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$.

1029. При яких значеннях m і n колінеарні вектори:

1) $\vec{p}(4; m; -2)$ і $\vec{t}(6; 9; n)$; 2) $\vec{c}(0; 2; -4)$ і $\vec{d}(m; -1; n)$?

Співнапрямлені чи протилежно напрямлені ці вектори?

1030. Дано: $A(3; 1; 8)$; $B(3; 2; 9)$; $C(4; 0; 5)$, D (4; -2; 3).

1) Довести, що вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ — колінеарні;

2) Який вид чотирикутника $ABCD$?

1031. Дано: $A(2; 1; 3)$; $B(2; 2; 5)$; $C(2; 3; 7)$.

1) Довести, що вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ — колінеарні;

2) Чи лежать точки A, B і C на одній прямій?

1032. Дано точки A(-1;3;2), B(-2;4;0), M(1;1;-3), N(0;5;0), P(-3;0;2) і Q(2;-1;4). Знайти:

1) координати вектора $3\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{PQ}$;

2) скалярні добутки $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MN}$ і $\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{MN}\right) \cdot \overrightarrow{PQ}$.

1033. Дано вектори $\vec{a} = (3; -1; 0)$ і $\vec{b} = (-3; 0; 4)$.Знайти:

1) довжини векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$; 2) кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

3) вектори, які колінеарні вектору $\vec{a}$ і довжина яких у три рази більша від довжини вектора $\vec{a}$.

1034. Довести, що чотирикутник *ABCD* з вершинами в точках *A*(1; -2; 3); *B*(1; 0; 5); *C*(3; 2; 8); *D*(3; 0; 6) є паралелограмом.

1035. *ABCD* — паралелограм. A(-2; 3: 4); B(-2; 3: 8); C(4; -1; 3). Знайти координати точки *D*.

Життєва математика

1036. Ширина хокейних воріт дорівнює 6 футів, висота – 4 фута. Знайдіть наближену площу воріт у квадратних метрах з точністю до двох знаків після коми.

Кут між векторами. Скалярний добуток векторів

1037. Знайти скалярний добуток векторів *a* і *b* , якщо:

1) $\vec{a}$ (2; 1; 4), $\vec{b}$ (-1; -2; 1); 2) $\vec{a}$ (1; 2; 0), $\vec{b}$ (3; 0; 11).

1038. Кут між векторами *a* і *b* дорівнює φ. Знайти скалярний добуток цих векторів, якщо:

1) $|\overrightarrow{a}| = 5$; $|\overrightarrow{b}|=4$; $\varphi = 60°$; 2) $|\overrightarrow{a}| = 5\sqrt{2}$; $|\overrightarrow{b}|=3$; $\varphi = 135°$.

1039. Чи є серед векторів $\vec{a}$(1; 1; 2), $\vec{b}$(3; -1; -2); $\vec{c}$(2; 2; -2) перпендикулярні?

1040. Дано вектори $\vec{a}$ (x; 1; 1) і $\vec{b}$ (2; 4; —2). Знайти *x*, якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6$.

1041. Дано вектори $\vec{a}$(*x;* -1; 3) і $\vec{b}$(3; 2; -2). При якому значенні *x* справджується рівність $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$?

1042. $(\widehat{a;b}) = \varphi$. Знайдіть $\vec{a} \cdot \vec{b}$, якщо:

1) $\vec{a} = 6$; $\vec{b} = 3$; $\varphi = 30^0$; 3) $\vec{a} = 8$; $\vec{b} = 2$; $\varphi = 135^0$;

2) $\vec{a} = 3$; $\vec{b} = 10$; $\varphi = 60^0$; 4) $\vec{a} = 4$; $\vec{b} = 6$; $\varphi = 180^0$.

1043. Доведіть, що вектори $\vec{m}$(-1; 4; 8) і $\vec{n}$(8; 10; -4) перпендикулярні.

1044. Чи перпендикулярні вектори $\vec{c}$ і $\vec{d}$, якщо:

1) $\vec{c}$(2; -1; 3), $\vec{d}$(2; -4; -2); 2) $\vec{c}$(3; -2; 1), $\vec{d}$(4; 6; 0)?

1045. При якому значенні *m* вектори $\vec{a}$(-1; *m;* 2) і $\vec{b}$(*m*; 3; 7) перпендикулярні?

1046. Знайдіть кут між векторами $\vec{a}$(0; 2; -2) і $\vec{b}$(1; 0; -1).

1047. Який кут утворюють вектори:

1) $\vec{a}$ (x; 0; 0) і $\vec{b}$ (0; y; 0); 2) $\vec{a}$ (0; a; b) і $\vec{b}$ (c; b; -a)?

1048. Який кут (гострий, тупий чи прямий) утворюють вектори, якщо їхній скалярний добуток:

1) додатне число; 2) від'ємне число; 3) дорівнює нулю?

1049. Знайдіть косинуси внутрішніх кутів трикутника з вершинами в точках A(2; 3; 2), B(4; 0; 8), C(8; 5; -1) та впевніться в тому, що він рівнобедренний.

1050. Знайдіть внутрішній кут при вершині *B* трикутника *ABC*, якщо *A*(0; -1; 5), *B*(-3; -1; 1), *C*(4; -1; 2).

1051. $\vec{c}$ і $\vec{d}$- ненульові вектори. Знайдіть кут між векторами $\vec{c}$ і $\vec{d}$, якщо:

1) $\vec{c} \cdot \vec{d} = |c||d|$; 3) $\vec{c} \cdot \vec{d} = \frac{\sqrt{2}}{2}|c||d|$;

2) $\vec{c} \cdot \vec{d} = -|c||d|$; 4) $\vec{c} \cdot \vec{d} = \frac{-|c||d|}{2}$.

1052. $(\widehat{a;b}) = 120^0$; $|\vec{a}| = 2$; $|\vec{b}| = 3$. Знайдіть:

1) $\vec{a}\vec{b}$; 2) $(\vec{a} + \vec{b})\vec{a}$; 3) $\vec{b}(\vec{a} - \vec{b})$; 4) $\vec{a}(2\vec{a} - 3\vec{b})$.

1053. При якому значенні *x* кут між векторами $\vec{a}(1; 1; 1)$ і $\vec{b}$ (x; —2; 3):

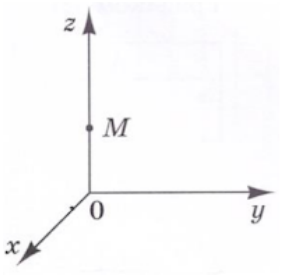
1) прямий; 2) гострий; 3) тупий?

Життєва математика

1054. Обчисліть скільки кубічних метрів повітря очистять від автомобільних вихлопних газів 100 каштанів, що ростуть уздовж дороги, якщо одне дерево очищає зону довжиною 100 м, шириною 12 м, висотою 10 м.

Координати на площині і в просторі

1055. У прямокутній декартовій системі координат у просторі на осі *z* вибрано точку *M* (див. рисунок). Серед наведених варіантів укажіть можливі координати цієї точки.(2016.о)



А	Б	В	Г	Д
(1;0;0)	(1;1;0)	(0;1;0)	(0;0;-1)	(0;0;1)

1056. Яка з наведених точок належить координатній площині yz прямокутної системи координат у просторі?(2016.д)

А	Б	В	Г	Д
(1;0;0)	(1;0;1)	(1;1;0)	(0;1;1)	(1;1;1)

1057. Яка з наведених точок належить осі Oz прямокутної системи координат у просторі? (2012.о1)

А	Б	В	Г	Д
M(0;-3;0)	*N*(3;0;-3)	*K*(-3;0;0)	*L*(-3;3;0)	*F*(0;0;-3)

1058. Яка з наведених точок лежить у площині Oxz прямокутної системи координат у просторі?(2012.о2)

А	Б	В	Г	Д
(0;-3;0)	(0;4;-3)	(3;0;-4)	(-4;3;0)	(-3;3;3)

1059. Знайдіть координати точки M, відносно якої симетричні точки E(−3;8;7) і F(−9;6;1).(2007.о)

А	Б	В	Г	Д
(-6;7;4)	(-12;14;8)	(0;0;0)	(3;1;3)	інша відповідь

1060. Дано точку P(-1;3;5). Знайдіть координати точки Q, симетричної точці P відносно координатної площини yz. (2008.п)

А	Б	В	Г	Д
(1;3;5)	(-1;-3;5)	(-1;3;-5)	(1;-3;-5)	(1;-3;5)

1061. Знайдіть точку, симетричну точці A(2; – 3; 7) відносно координатної площини yz.(2011.п)

А	Б	В	Г	Д
(2;-3;-7)	(-2;-3;7)	(2;3;7)	(-2;3;-7)	(-2;-3;-7)

1062. У прямокутній системі координат у просторі знайдіть відстань від точки M(0;8;6) до осі Oy.(2012.п)

А	Б	В	Г	Д
6	7	8	10	14

1063. Знайдіть відстань від точки A (2;3;6) до осі Oz.(2010.п2)

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{13}$	7	6	5	$3\sqrt{5}$

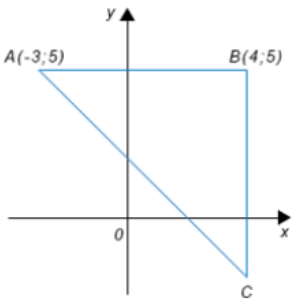
1064. Визначте відстань від точки A(−1;−3;4) до координатної площини xz.(2017.п)

А	Б	В	Г	Д
1	4	5	3	$\sqrt{26}$

1065. Точка C лежить на осі x прямокутної системи координат і знаходиться на відстані 5 від точки A (-2;4). Відрізок AC перетинає вісь y. Знайдіть координати точки C. (2014.о)

А	Б	В	Г	Д
(1;0)	(0;1)	(-5;0)	(0;0)	(3;4)

1066. У прямокутній системі координат зображено прямокутний рівнобедрений трикутник ABC, в якому A(−3; 5) і B(4; 5)(див. рисунок). Знайдіть координати точки C.(2010.о2)

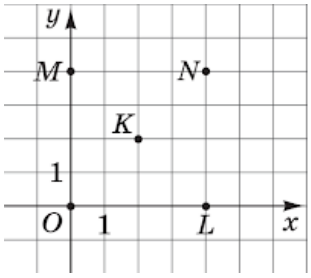


А	Б	В	Г	Д
(4;-3)	(4;-2)	(5;-3)	(-2;4)	(4;-1)

1067. Укажіть рівняння прямої, що проходить через точку O(0;0). (2015.д)

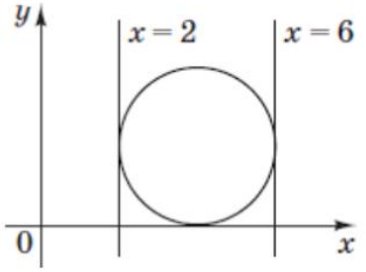
А	Б	В	Г	Д
y= - 2x	*y=x+2*	*y=x-2*	*y=2-x*	*y=-2*

1068. У координатній площині ху зображено п’ять точок: O, L, N, M, K (див. рисунок). Коло з центром в одній із цих точок дотикається до осі ординат у точці M. У якій точці знаходиться центр цього кола? (2013.о1)



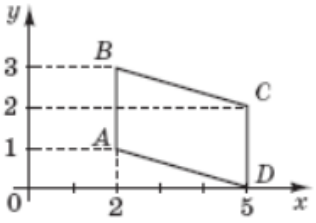
А	Б	В	Г	Д
у точці L	у точці N	у точці M	у точці O	у точці K

1069. На координатній площині ху зображено коло, яке дотикається до прямих x=2, x=6 та осі x (див. рисунок). Визначте координати точки, яка є центром цього кола.(2014.д)



А	Б	В	Г	Д
(4;1)	(6;2)	(4;4)	(2;4)	(4;2)

1070. Обчисліть площу чотирикутника ABCD (див. рисунок), сторони AB і CD якого паралельні осі Oy.(2011.о)



А	Б	В	Г	Д
10	5	3	6	7

1071. У прямокутній системі координат у просторі початком вектора $\vec{AB}(9;12;-8)$ є точка A(3; –7; 11).

1. Визначте ординату точки B.
2. Обчисліть модуль вектора $\vec{d} = 4\vec{AB} + \vec{BA}$.

1072. У прямокутній системі координат ху на площині задано рівнобедрений трикутник ABC, у якому AB=BC. Вершина B лежить на прямій y=2x+9. Визначте площу трикутника ABC, якщо A(-6;-8), C(4;-8).(2020.д)

1073. У прямокутній системі координат на площині задано трапецію ABCD (AD||BC, AD>BC). Площа трапеції дорівнює 42. Визначте абсцису вершини D, якщо A (-1;3), B (1;6), C (7;6).(2018.п)

1074. Усі вершини трапеції ABCD належать графіку функції $y=36-x^2$, побудованому в прямокутній декартовій системі координат. Більша основа AD лежить на осі x. Яку найбільшу площу може мати трапеція ABCD? (2014.д)

1075. Центр кола, заданого рівнянням $x^2-8x+y^2+7=0$, збігається з точкою перетину діагоналей AC і BD паралелограма ABCD. Обчисліть площу цього паралелограма, якщо A(-4;-3) і B(0;3).(2019.д)

1076. У прямокутній системі координат на площині ху навколо трикутника ABC описано коло, задане рівнянням $x^2+y^2-4x=68$. Визначте довжину сторони BC, якщо $\angle A=45^o$.(2018.д)

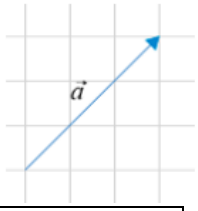
1077. У прямокутній системі координат ху на площині задано рівнобедрений трикутник ACB, у якому AC=BC, A(2;-5), B(4;3). Навколо цього трикутника

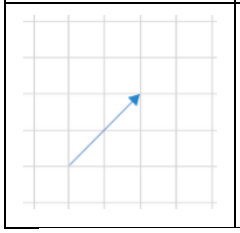
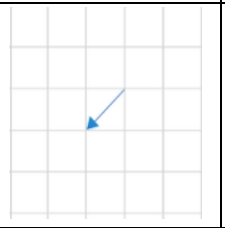
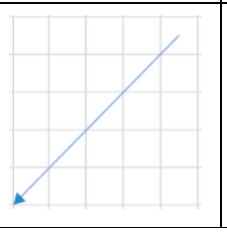
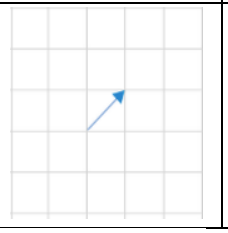
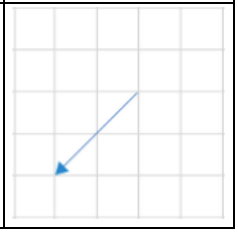
описано коло, задане рівнянням $(x-3)^2+y^2+2y=16$. Визначте площу трикутника ABC.(2020.п)

1078. У прямокутній системі координат на площині xy задано прямокутний трикутник ABC ($\angle C=90^o$). Коло з центром у точці A, задане рівнянням $(x+3)^2+y^2-4y=21$, проходить через вершину C. Сторона AC паралельна осі y, довжина сторони BC втричі більша за довжину сторони AC. Визначте координати вершини B (x_B; y_B), якщо вона лежить у першій координатній чверті. У відповідь запишіть суму x_B+y_B.(2019.о)

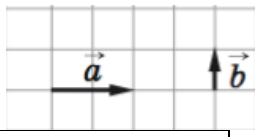
Вектори в просторі

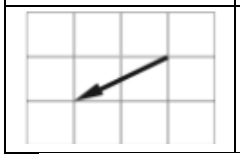
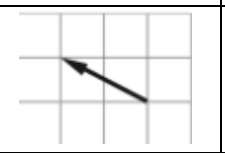
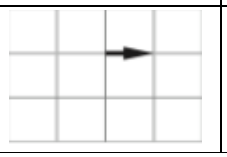
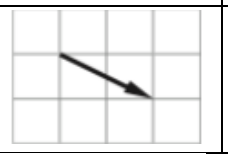
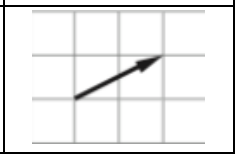
1079. На рисунку зображено вектор $\vec{a}$. Який із наведених векторів дорівнює вектору $-\frac{2}{3}\vec{a}$? (2010.о1)



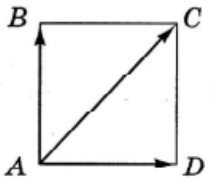
А	Б	В	Г	Д
				

1080. На рисунку зображено вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Який із наведених векторів дорівнює вектору $\vec{a}+\vec{b}$?(2011.п)



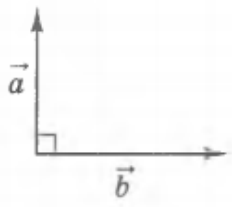
А	Б	В	Г	Д
				

1081. На рисунку зображено квадрат ABCD. Укажіть правильну векторну рівність.(2012.п, 2018.п)



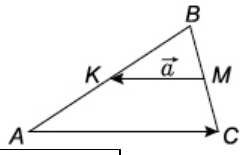
А	Б	В	Г	Д
$\vec{AC}=\vec{AB}-\vec{AD}$	$\vec{AC}=\vec{AD}-\vec{AB}$	$\vec{AC}=\vec{AB}+\vec{AD}$	$\vec{AC}= -\vec{AD}-\vec{AB}$	$\vec{AC}=\sqrt{2}(\vec{AB}+\vec{AD})$

1082. Довжини перпендикулярних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$(див. рисунок) дорівнюють 6 і 8 відповідно. Знайдіть довжину вектора $\vec{a}+\vec{b}$.(2015.п2)



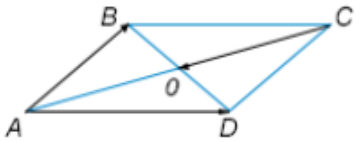
А	Б	В	Г	Д
2	6	8	10	14

1083. На рисунку зображено трикутник АВС, точки К і М – середини сторін АВ і ВС відповідно. Укажіть правильну рівність, якщо $\overrightarrow{МК}=\vec{a}$. (2015.д)



А	Б	В	Г	Д
$\vec{AC}=2\vec{a}$	$\vec{AC}=\frac{1}{2}\vec{a}$	$\vec{AC}=-\vec{a}$	$\vec{AC}=-\frac{1}{2}\vec{a}$	$\vec{AC}=-2\vec{a}$

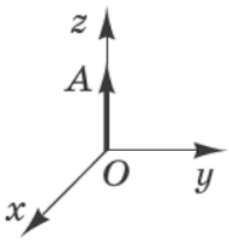
1084. Діагоналі паралелограма ABCD перетинаються в точці О(див. рисунок). Укажіть правильну векторну рівність.(2013.п)



А $\overrightarrow{CO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$ **Б** $\overrightarrow{CO}=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$

В $\overrightarrow{CO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})$ **Г** $\overrightarrow{CO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})$ **Д** $\overrightarrow{CO}=2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$

1085. Вектор $\vec{OA}$ лежить на осі z прямокутної декартової системи координат у просторі (див. рисунок), і його початок збігається з початком координат. Визначте координати вектора $\vec{OA}$, якщо його довжина дорівнює 3.(2014.о)



А	Б	В	Г	Д
(1;1;1)	(0;3;0)	(0;0;3)	(3;0;0)	(3;3;3)

1086. Задано точки К (0;1;0) і М (0;0;1). Знайдіть координати вектора $\vec{KM}$.

А	Б	В	Г	Д
$\vec{KM}(0;1;1)$	$\vec{KM}(0;-1;1)$	$\vec{KM}(0;1;-1)$	$\vec{KM}(2;0;0)$	$\vec{KM}(0;0;0)$

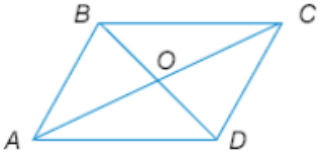
1087. Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо А(-2;3), В(-8;-5). (2010.п2)

А	Б	В	Г	Д
$\overrightarrow{AB}(6;8)$	$\overrightarrow{AB}(-10;-8)$	$\overrightarrow{AB}(-10;2)$	$\overrightarrow{AB}(-6;-2)$	$\overrightarrow{AB}(-6;-8)$

1088. Знайдіть вектор $\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}$, якщо $\vec{a}(3;-1;2)$, $\vec{b}(-2;2;5)$. (2009.о)

А	Б	В	Г	Д
$\vec{c}(5;-3;-3)$	$\vec{c}(4;0;-1)$	$\vec{c}(8;0;-1)$	$\vec{c}(4;-4;-1)$	$\vec{c}(8;-4;-1)$

1089. На рисунку зображено паралелограм ABCD, діагоналі якого перетинаються в точці О. Укажіть пару колінеарних векторів.(2014.п)



А	Б	В	Г	Д
$\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BD}$	$\overrightarrow{AO}$ і $\overrightarrow{OD}$	$\overrightarrow{BO}$ і $\overrightarrow{BD}$	$\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{BD}$

1090. При якому значенні у вектори $\vec{a}(-3;5)$ і b(6; y) колінеарні? (2012.о2)

А	Б	В	Г	Д

-10	-2,5	2,5	3,6	10

1091. При яких значеннях m і n вектори $\vec{a}(m; 2; 3)$ і $b(-12; 6; n)$ колінеарні?(2010.п1)

А m=-3,6 і n=9 **Б** m=-4 і n=1 **В** m=-36 і n=1

Г m=3 і n=9 **Д** m=-4 і n=9

1092. Сторона рівностороннього трикутника ABC дорівнює 5 см. Знайдіть скалярний добуток $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$. (2007.о)

1093. У прямокутній системі координат у просторі задано вектор $\vec{AB}$ (-3;8;1) і точку B(7;–2;0), точка O — початок координат.

1. Визначте ординату у точки A(x;y;z).
2. Обчисліть скалярний добуток $\vec{OA}\cdot\vec{AB}$.

1094. Обчисліть скалярний добуток векторів $\vec{a}(-3; 2; -1)$ і $\vec{b}(-1; -4; 5)$. (2010.о2)

А	Б	В	Г	Д
120	26	0	-10	-16

1095. При якому значенні x вектори $\vec{a}(2;x)$ і $\vec{b}(-4;10)$ перпендикулярні? (2012.о1)

А	Б	В	Г	Д
-5	-0,8	0,8	5	20

1096. У прямокутній системі координат на площині задано вектори $\vec{a}(-1;1)$ та $\vec{b}(-1;2)$. Визначте значення m, за якого вектори $\vec{a}+m\vec{b}$ та $\vec{b}$ перпендикулярні. (2017.д)

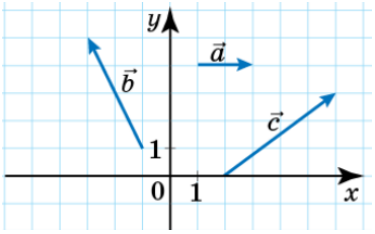
1097. Визначте кут між векторами $\vec{a}$ і $\overrightarrow{b+c}$ у градусах, якщо відомо, що $\vec{a}(2; 2)$, $\vec{b}(2; 4)$ і $\vec{c}(-2; -6)$. (2008.о)

1098. Паралелограм ABCD побудовано на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ як на сторонах. Відомо, що $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 5, |\vec{a}+\vec{b}| = 7$. Знайдіть величину кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (у градусах). (2009.п)

1099. У прямокутній системі координат на площині задано паралелограм ABCD, cosA=0,4. Визначте довжину діагоналі BD, якщо скалярний добуток векторів $\vec{AB}$ (6; -8) і $\vec{AD}$ дорівнює 96. (2016.о)

1100. У прямокутній системі координат на площині задано трапецію ABCD. основа якої AD вдвічі більша за основу BC. Обчисліть скалярний добуток векторів $\overrightarrow{BD}$ та $\overrightarrow{AC}$, якщо $\overrightarrow{AB}$ (2; 9) і $\overrightarrow{BC}$ (–4; 3). (2016.д)

1101. У прямокутній системі координат на площині зображено вектори $\vec{a}, \vec{b}$ та $\vec{c}$. Визначте косинус кута між векторами $\vec{a}+\vec{b}$ та $\vec{c}$. (2017.п)



1102. У прямокутній системі координат на площині задано колінеарні вектори вектори $\vec{AB}$ та $\vec{a}$ (3; -5). Визначте абсцису точки В, якщо А(-4;1), а точка В лежить на прямій y=3.(2018.о)

1103. У прямокутній системі координат на площині задано взаємно перпендикулярні вектори $\vec{AB}$ та $\vec{a}$(4; 3). Визначте абсцису точки В, якщо А(-2;0), а точка В лежить на прямій y=2x.(2017.о)

1104. На колі із центром О, яке задано рівнянням $x^2+y^2=80$, вибрано точку $M(x_0,y_0)$ так, що вектор $\vec{OM}$ перпендикулярний до вектора $\vec{a}$ (-2;1). Визначте абсцису x_0 точки М, якщо $x_0<0$.(2019.п)

1105. У прямокутній системі координат ху на площині коло задано рівнянням $x^2-4x+y^2+12y=9$. Центр О цього кола збігається з точкою перетину діагоналей паралелограма ABCD. Визначте координати вершини $C(x_C;y_C)$, якщо вектор $\vec{OA}$ (-1;2). У відповідь запишіть добуток $x_C \cdot y_C$.(2020.о)

Рівняння площини, сфери

1106. Дано сферу $(x+1)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=4$.

1) Знайти відстань від центра до початку координат.
2) Чи належить початок координат кругу, обмеженому даним колом?
3) Чи існують точки сфери, що мають рівні абсциси, ординати і аплікати?
4) Записати рівняння сфери, концентричному даній, з радіусом 5.

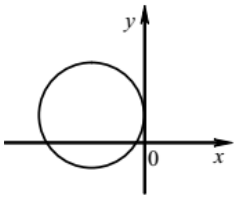
1107. Як задати в просторі коло, розміщене в площині xz, з центром в початку координат і з радіусом 1?

1108. Яку фігуру в просторі визначає рівняння:

1) $y=-2$; 2) $(x+1)^2+(y-1)^2+z^2=0$; 3) $y=x^2+1$.

1109. Чи є точка (1;3;4) центром сфери $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=9$.

1110. Якому з наведених рівнянь може задавати коло, зображене на рисунку?(2015.п1)



А $(x+2)^2+(y-1)^2=4$ **Б** $(x-2)^2+(y+1)^2=4$
В $(x+2)^2+(y-1)^2=1$ **Г** $(x-2)^2+(y+1)^2=1$
Д $(x+2)^2+(y-1)^2=9$

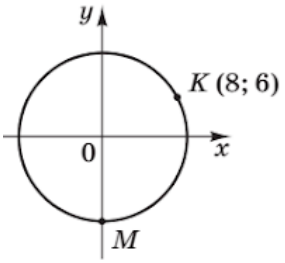
1111. Укажіть рівняння кола з центром у початку координат, якщо воно проходить через точку (3; – 4).(2011.п)

А $x^2+y^2=5$ **Б** $(x+3)^2+(y-4)^2=25$ **В** $x^2+y^2=25$
Г $x^2+y^2=49$ **Д** $(x-3)^2+(y+4)^2=25$

1112. Точка А (3;1) належить колу з центром у точці О (-2;1). Знайдіть радіус цього кола.(2010.п1)

А	Б	В	Г	Д
10	5	3	2	1

1113. На координатній площині ху зображено коло, центр якого збігається з початком координат (див. рисунок). Точки К (8;6) і М (х;у) належать цьому колу. Визначте координати точки М.(2013.о2)



А	Б	В	Г	Д
(-10;0)	(10;0)	(0;-14)	(0;-10)	(0;10)

1114. У прямокутній системі координат у просторі задано сферу із центром у початку координат, якій належить точка А(0;0;-5). Яка з наведених точок також належить цій сфері? (2017.о)

А	Б	В	Г	Д
К(5;5;0)	L(0;1;4)	М(0;0;10)	N(0;0;5)	Р(5;5;5)

1115. У прямокутній системі координат у просторі задано сферу з центром у точці М. Відрізок АВ — діаметр цієї сфери. Визначте координати точки М, якщо А (2;-1;0), В (8;3;2).(2017.д)

А	Б	В	Г	Д
(10;2;2)	(6;4;2)	(3;2;1)	(5;1;2)	(5;1;1)

1116. Скласти рівняння площини, що проходить через точку А(1;-3;2) паралельно площині $4x - 2y - z + 7 = 0$.

1117. Точка А(-1;-1;2) є основою перпендикуляра, опущеного з початку координат на площину. Скласти рівняння цієї площини.

1118. Знайти відстань від точки А(-2;3;-4) до площини $2x + 2y - z + 3 = 0$.

1119. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку А(1;3;1) перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (-1; 2; -5)$.

1120. Скласти рівняння площини, що проходить через точку А(1;-3;2) паралельно площині 2x+y+2z-1=0.

Життєва математика

1121. Товарний потіг рухається зі швидкістю 54 км/год. Діаметр його колеса дорівнює 1,2 м. Скільки обертів за хвилину робить колесо потяга? (для спрощення обчислень вважайте, що $\pi \approx 3$).

ДОВІДКОВІ МАТЕРІАЛИ

Таблиця квадратів від 10 до 49

Десятки	Одиниці									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

Формули скороченого множення

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Модуль числа

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ якщо } a \geqslant 0, \\ -a, \text{ якщо } a < 0 \end{cases}$$

Квадратне рівняння

$ax^2 + bx + c = 0, \ a \neq 0$

$D = b^2 - 4ac$ – дискримінант

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \ x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$, якщо $D > 0$

$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$, якщо $D = 0$

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Степені

$a^1 = a, \ a^n = \underbrace{a \cdot a \ldots \cdot a}_{n \text{ разів}}$ для $a \in R, \ n \in N, \ n \geqslant 2$

$a^0 = 1$, де $a \neq 0 \quad \sqrt{a^2} = |a|$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ для $a \neq 0, \ n \in N$

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \ a > 0, \ m \in Z, \ n \in N, \ n \geqslant 2$

$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad (a^x)^y = a^{x \cdot y}$

$(ab)^x = a^x \cdot b^x \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

Логарифми

$a > 0, \ a \neq 1, \ b > 0, \ c > 0, \ k \neq 0$

$a^{\log_a b} = b \quad \log_a a = 1 \quad \log_a 1 = 0$

$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$

$\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \cdot \log_a b$

Арифметична прогресія

$a_n = a_1 + d(n - 1) \quad S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

Геометрична прогресія

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} \quad S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, \quad (q \neq 1)$

Теорія ймовірностей

$P(A) = \frac{k}{n}$

Комбінаторика

$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n! \quad C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!} \quad A_n^k = \frac{n!}{(n - k)!}$

Похідна функції

C, α – сталі

$(C)' = 0$

$x' = 1$ $\qquad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\qquad (e^x)' = e^x$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $\qquad (\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$ $\qquad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(u+v)' = u' + v'$ $\qquad (u-v)' = u' - v'$

$(uv)' = u'v + uv'$ $\qquad (Cu)' = Cu'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Первісна функції та визначений інтеграл

Функція $f(x)$	Загальний вигляд первісних $F(x) + C$, C – довільна стала
0	C
1	$x + C$
x^α, $\alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert + C$
e^x	$e^x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$

$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ – формула Ньютона-Лейбніца

Тригонометрія

$\sin\alpha = y_\alpha$ $\qquad \cos\alpha = x_\alpha$ $\qquad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

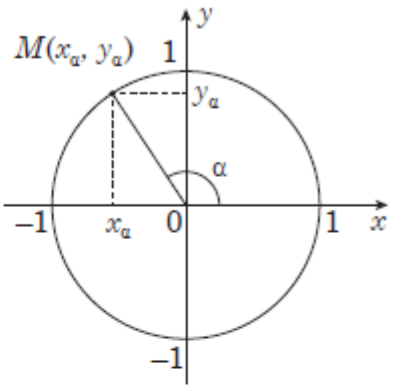
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\qquad 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ $\qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos\alpha$ $\qquad \sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$

$\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$ $\qquad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$

$\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ $\qquad \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$



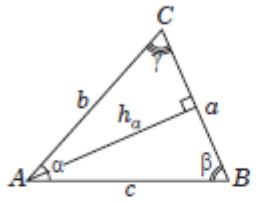
Таблиця значень тригонометричних функцій деяких кутів

α	рад	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	град	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin\alpha$		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1	0
$\cos\alpha$		1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$		0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не існує	0	не існує	0

ГЕОМЕТРІЯ

Трикутники

Довільний трикутник



$p = \frac{a+b+c}{2}$ $\quad \alpha + \beta + \gamma = 180°$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$

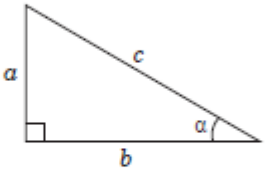
R – радіус кола, описаного навколо трикутника ABC

$S = \frac{1}{2}a \cdot h_a$ $\quad S = \frac{1}{2}b \cdot c \cdot \sin\alpha$ $\quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Прямокутний трикутник

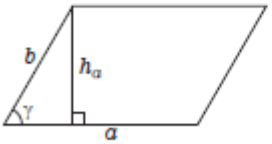
$a^2 + b^2 = c^2$ (теорема Піфагора)

$\frac{b}{c} = \cos\alpha$ $\quad \frac{a}{c} = \sin\alpha$ $\quad \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha$



Чотирикутники

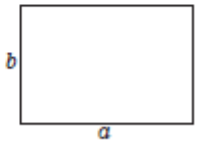
Паралелограм



$S = ab\sin\gamma$

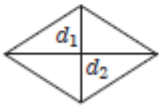
$S = ah_a$

Прямокутник



$S = ab$

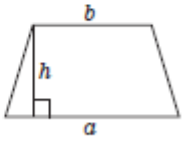
Ромб



$S = \frac{1}{2}d_1d_2$,

d_1, d_2 – діагоналі ромба

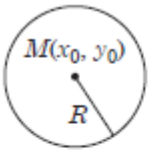
Трапеція



$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$,

a і b – основи трапеції

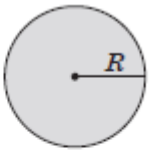
Коло



$L = 2\pi R$

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$

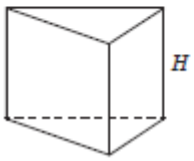
Круг



$S = \pi R^2$

Об'ємні фігури та тіла

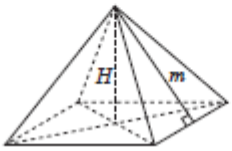
Пряма призма



$V = S_{осн} \cdot H$

$S_б = P_{осн} \cdot H$

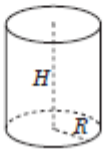
Правильна піраміда



$V = \frac{1}{3}S_{осн} \cdot H$

$S_б = \frac{1}{2}P_{осн} \cdot m$

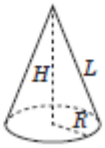
Циліндр



$V = \pi R^2 H$

$S_б = 2\pi RH$

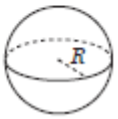
Конус



$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$

$S_б = \pi RL$

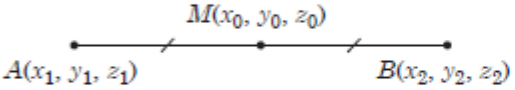
Куля, сфера



$V = \frac{4}{3}\pi R^3$

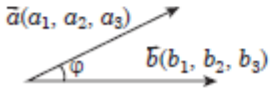
$S = 4\pi R^2$

Координати та вектори



$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ $\quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$ $\quad z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}$

$\overline{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ $\quad |\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$



$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cos\varphi$

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту: підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти. Київ: Видавничий дім «Освіта», 2018. 288 с.
2. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту: підручник для 11 класу закладів загальної середньої освіти. Київ: Видавничий дім «Освіта», 2019. 272 с.
3. Бурда М. І. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту: підруч. для 10 класу закладів загальної середньої освіти. Київ: УОВЦ «Оріон», 2018. 288 с.
4. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту: підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти. Харків: Гімназія, 2018. 256 с.
5. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту: підручник для 11 класу закладів загальної середньої освіти. Харків: Гімназія, 2019. 208 с.
6. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія: проф. рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків: Гімназія, 2018. 240 с.
7. Нелін Є. П. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту: підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. Освіти. Харків: Видавництво «Ранок», 2018. 328 с.
8. Нелін Є. П., Долгова О. Є. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту: підручник для 11 класу закладів загальної середньої освіти. Харків: Вид-во «Ранок», 2019. 304 с.
9. Істер О. С. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту: підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти. Київ: Генеза, 2018. 384 с.
10. Істер О. С. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту: підручник для 11 класу закладів загальної середньої освіти. Київ: Генеза, 2019. 304 с.

ЗМІСТ

Передмова……..……..……... 3

Частина І. Алгебра і початки аналізу

Розділ 1. Повторення за шкільний курс……. 4
Обчислення виразів……... 4
Числові послідовності……... 5
Арифметична прогресія, її властивості. Сума перших *n* членів арифметичної прогресії……. 6
Геометрична прогресія, її властивості. Сума перших *n* членів геометричної прогресії……..… 7
Рівняння та системи рівнянь……..... 8
Розв'язування задач за допомогою лінійних рівнянь. Рівняння як математична модель задачі……..…… 9
Нерівності та їх системи……..... 9
Геометричні задачі……..…..….... 10

Розділ 2. Функції, їхні властивості і графіки……... 10
Числові функції. Способи задання функцій. Область визначення і множина значень функції. ……..…….. 11
Зростаючі та спадні, парні та непарні функції……..…… 13
Неперервність функцій……..….. 15
Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень відомих графіків функцій……..…….. 16
Дослідження властивостей функції за її графіком……..….. 18
Корінь *n* – го степеня. Арифметичний корінь *n* – го степеня та його властивості……...……..... 19
Степені з раціональними показниками, їх властивості…….....……..….... 22
Степенева функція, її властивості і графік……. 24
Ірраціональні рівняння……. 27

Розділ 3. Тригонометричні функції……...……..28
Синус, косинус, тангенс, котангенс кута……28
Радіанне вимірювання кутів…… ……29
Тригонометричні функції числового аргументу……30
Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу……...……32
Формули зведення……. ……...…33
Тригонометричні формули додавання…….……...35
Формули подвійного і половинного аргументів. Формули пониження степеня……...… ……..……..36
Сума та різниця синусів і косинусів……..……..38
Періодичність функцій……...……40

Властивості і графіки функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ 41
Властивості і графіки функцій $y = tgx$ і $y = ctgx$ 44
Найпростіші тригонометричні рівняння виду $\sin t = a$, $\cos t = a$ 45
Найпростіші тригонометричні рівняння виду $tgt = a$, $ctgt = a$ 47
Основні способи розв'язування тригонометричних рівнянь..... 48

Розділ 4. Похідна функції та її застосування…….....50
Границя функції в точці……...50
Приріст функції. Приріст аргументу. Означення похідної…….....51
Похідні елементарних функцій……..... 52
Геометричний та фізичний зміст похідної…….52
Правила диференціювання……. 55
Похідні степеневої, показникової та логарифмічної функцій……57
Похідна складеної функції……..58
Ознаки сталості. Зростання і спадання функції…….....60
Екстремуми функції. ….....62
Дослідження функції та побудова її графіка за допомогою похідної…… 64
Найбільше та найменше значення функції……66

Частина ІІ. Геометрія

Розділ 5. Паралельність прямих і площин у просторі……..68
Основні поняття стереометрії, аксіоми стереометрії та найпростіші наслідки з них……...68
Перерізи многогранників……72
Взаємне розміщення прямих у просторі. ……..... 74
Паралельне проектування, його властивості.
Зображення плоских і просторових фігур у стереометрії…. ……78
Розміщення прямої та площини у просторі. Паралельність прямої та площини……81
Паралельність площин……... ……..... 83

Розділ 6. Перпендикулярність прямих і площин у просторі……87
Перпендикулярність прямих у просторі……...……87
Перпендикулярність прямої та площини. ……..…….....89
Перпендикуляр і похила……...……...93
Теорема про три перпендикуляри……...……...94
Двогранні кути. Лінійний кут двогранного кута……..97
Перпендикулярність площин. ……99
Вимірювання відстаней у просторі: від точки до площини, від прямої до площини, між площинами……....102
Вимірювання кутів у просторі……...104
Ортогональне проектування……..108

Розділ 7. Вектори і координати в просторі…….....109
Прямокутна система координат у просторі…….. 109
Відстань між точками. Координати середини відрізка……..... 110
Вектори у просторі. Дії з векторами…….....112
Координати вектора. Дії над векторами, що задані координатами……...113
Кут між векторами. Скалярний добуток векторів…….....115
Координати на площині і впросторі……116
Вектори в просторі…….....119
Рівняння площини, сфери…….....122

Довідкові матеріали ...……..……...124

Список використаних джерел…..……...…127